参考答案

扫码获取详解详析

第一章　集合与常用逻辑用语

1.1　集合的概念

1. C 【解析】由题意,选项 A,B,D 都不满足集合元素的确定性,选项 C 中的元素是确定的,可以组成集合.故选 C.

2. B 【解析】$\frac{1}{2}$是有理数,故①正确;$\sqrt{3}$不是正整数,故②错误;-1不是自然数,故③错误;$2+\sqrt{2}$不是有理数,故④错误;$\frac{1}{2}$不是整数,故⑤正确.故正确的有 2 个.故选 B.

3. A 【解析】∵$x\in\mathbf{N}$且$x<5$,∴x的值可以为 0,1,2,3,4,故集合用列举法表示为$\{0,1,2,3,4\}$.

4. D 【解析】∵$P=\{y=x^2+1\}$是单元素集,集合中的元素是$y=x^2+1$,$Q=\{y\mid y=x^2+1\}=\{y\mid y\geqslant1\}$,$E=\{x\mid y=x^2+1\}=\mathbf{R}$,$F=\{(x,y)\mid y=x^2+1\}$中的元素是点,$G=\{x\mid x\geqslant1\}$,∴$Q$与$G$相等.故选 D.

5. C 【解析】∵集合$A=\{3,-1\}$,$B=\{m^2-2m,-1\}$,A与B中元素相同,∴$m^2-2m=3$,即$m^2-2m-3=0$,解得$m=3$或$m=-1$.故选 C.

6. C 【解析】由已知可得集合$A=\{2,3\}$,所以集合$B=\{6,9\}$,故选 C.

7. D 【解析】由题知集合$B=\{(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(3,2),(4,2),(5,2),(4,3),(5,3),(5,4)\}$,共含 10 个元素.

8. B 【解析】因为$a\in P$,$b\in Q$,所以$a=2k_1$,$k_1\in\mathbf{Z}$,$b=2k_2-1$,$k_2\in\mathbf{Z}$,所以$a+b=2(k_1+k_2)-1=2k-1\in Q$,其中$k_1$,$k_2$,$k\in\mathbf{Z}$,故选 B.

9. ABC 【解析】当$a=0$时,$A=\left\{\frac{\sqrt{2}}{4}\right\}$,满足题意;当$a\neq0$时,由题意知$\Delta=(2\sqrt{2})^2-4a(a-1)=0$,即$a^2-a-2=0$,解得$a=2$或$a=-1$.故选 ABC.

10. $\{5,4,2,-2\}$ 【解析】∵$x\in\mathbf{Z}$,$\frac{8}{6-x}\in\mathbf{N}$,∴$6-x\in\{1,2,4,8\}$,∴$x\in\{5,4,2,-2\}$,即$A=\{5,4,2,-2\}$.

11. $a\geqslant2$ 【解析】∵$2\notin A$,∴$2-a\leqslant0$,即$a\geqslant2$.

12. -1 【解析】由题意知$a\neq0$,若$a=a^2$,则$a=1$,检验可知不满足集合中元素的互异性,所以$a=a+b$,则$b=0$,此时$a^2=1$,可得$a=-1$,集合为$\{-1,0,1\}$,满足题意,故$a^{2023}+b^{2024}=-1$.

13. 解:(1)由 1,2,3 三个数字中的两个数字(没有重复数字)组成的自然数有 12,21,13,31,23,32,用列举法可表示为$\{12,21,13,31,23,32\}$.

(2)由$\sqrt{2x+1}+|y-2|=0$,得$\begin{cases}2x+1=0,\\y-2=0,\end{cases}$

所以$\begin{cases}x=-\frac{1}{2},\\y=2,\end{cases}$所以方程$\sqrt{2x+1}+|y-2|=0$的解集用描述法可表示为$\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}x=-\frac{1}{2},\\y=2\end{cases}\right\}$.

(3)由$\begin{cases}0<x-1<3,\\0\leqslant y+2\leqslant2,\end{cases}$得$\begin{cases}1<x<4,\\-2\leqslant y\leqslant0,\end{cases}$所以平面直角坐标系中,横纵坐标满足条件$\begin{cases}0<x-1<3,\\0\leqslant y+2\leqslant2\end{cases}$的整数点组成的集合用描述法表示为$\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}1<x<4,\\-2\leqslant y\leqslant0,\end{cases}x\in\mathbf{Z},y\in\mathbf{Z}\right\}$,用列举法表示为$\{(2,-2),(2,-1),(2,0),(3,-2),(3,-1),(3,0)\}$.

14. 解:因为$2\in M$,所以$2^2-2-m=0$,解得$m=2$.
解方程$x^2-x-2=0$,
即$(x+1)(x-2)=0$,得$x=-1$或$x=2$,
故M中含有两个元素-1,2,所以$M=\{-1,2\}$.

15. 5　2024 【解析】若$A=\{x\in\mathbf{N}^*\mid1\leqslant x\leqslant4\}=\{1,2,3,4\}$,则$B=\{3,4,5,6,7\}$,所以$L(A)=5$.若$A=\{x\in\mathbf{N}^*\mid1\leqslant x\leqslant2n,n\in\mathbf{N}^*\}=\{1,2,3,\cdots,2n-1,2n(n\in\mathbf{N}^*)\}$,则易知集合$A$中任意两个元素的和的最小值是$1+2=3$,最大值是$2n-1+2n=4n-1$,且对任意$k\in\mathbf{N}^*$,$3\leqslant k\leqslant4n-1$,都存在$a_i,a_j\in A$,使得$a_i+a_j=k$,所以$L(A)=4n-1-3+1=4n-3$.由$4n-3=8093$,解得$n=2024$.

16. 解:(1)由题意知,若A中只有一个元素,则这三个数相等,即$a^2=2-a=4$,由$2-a=4$,解得$a=-2$,此时$a^2=4$,符合条件.
故当$a=-2$时,A中只有一个元素.
(2)由题意可知,这三个数中必有两个数相等.
当$2-a=4$时,$a=-2$,由(1)知此时集合A中只含有一个元素,不符合题意;
当$a^2=4$,即$a=2$或$a=-2$(舍去)时,$2-a=0$,故此时集合A中含有两个元素 0,4.
当$a^2=2-a$,即$a^2+a-2=0$时,由$(a-1)(a+2)=0$,解得$a=1$或$a=-2$(舍去),此时$a^2=2-a=1$,显然集合A中含有两个元素 1,4.
综上,若A中只含有两个元素,则$a=2$或$a=1$.

1.2　集合间的基本关系

1. C 【解析】对于 A,$\varnothing$中不含有任何元素,$\varnothing$是任何集合的子集,则$\varnothing\subseteq\{0\}$,故 A 错误;对于 B,$\mathbf{Q}$表示有理数集,$\sqrt{3}$为无理数,则$\sqrt{3}\notin\mathbf{Q}$,故 B 错误;对于 C,$\mathbf{N}$表示自然数集,$\mathbf{Z}$表示整数集,则$\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}$,故 C 正确;对于 D,集合之间不能用“$\in$”符号,故 D 错误.故选 C.

2. D 【解析】$0\in X$,故 A 错误;$\{0\}\subseteq X$,故 B 错误,D 正确;$\varnothing\subseteq X$,故 C 错误.故选 D.

3. C 【解析】方法一:若集合A的真子集中不含有任何元素,

则真子集为$\varnothing$;若集合A的真子集中含有1个元素,则真子集为$\{1\}$,$\{2\}$,$\{4\}$;若集合A的真子集中含有2个元素,则真子集为$\{1,2\}$,$\{1,4\}$,$\{2,4\}$.故集合A的真子集个数为7.

方法二:因为集合$A=\{1,2,4\}$中有三个元素,所以集合A的真子集个数为$2^3-1=7$.故选C.

4. B 【解析】$N=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2=x\}=\{0,1\}$,$M=\{x\in\mathbf{R}\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$,$\therefore N\subsetneqq M$.故选B.

5. A 【解析】当$a+2=3$时,$a=1$,$a^2=1$,与集合中元素的互异性矛盾.当$a+2=a^2$时,解得$a=-1$或$a=2$,若$a=-1$,则$a^2=1$,与集合中元素的互异性矛盾;若$a=2$,则$A=\{1,3,4\}$,$B=\{1,4\}$,符合题意.综上,$a=2$,故a的取值集合为$\{2\}$.故选A.

6. B 【解析】$\because N=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{k+2}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$,且$M=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{2k+1}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$,$k+2$是整数,$2k+1$是奇数,$\therefore M\subseteq N$,故选B.

7. D 【解析】当集合M的非空子集中含一个元素时,$\{-1\}$,$\{1\}$为和美集合;当集合M的非空子集中含有两个元素时,$\{-1,1\}$,$\left\{\frac{1}{3},3\right\}$为和美集合;当集合$M$的非空子集中含有三个元素时,$\left\{-1,\frac{1}{3},3\right\}$,$\left\{1,\frac{1}{3},3\right\}$为和美集合;当集合$M$的非空子集中含有四个元素时,$\left\{-1,1,\frac{1}{3},3\right\}$为和美集合.综上,和美集合有7个.故选D.

8. AD 【解析】对于A,$0\in\{0\}$,故A正确;对于B,集合$\{0,1\}$表示数集,集合$\{(0,1)\}$表示点集,故B错误;对于C,集合$\{(a,b)\}$表示以点(a,b)为元素的集合,集合$\{(b,a)\}$表示以点(b,a)为元素的集合,故C错误;对于D,空集是任意非空集合的真子集,故D正确.故选AD.

9. AC 【解析】因为$A=\{0,1\}$,所以$B=\{x\mid x\in A\}=\{0,1\}$,$C=\{x\mid x\subseteq A\}=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$,所以有$A=B$成立,$A\subsetneqq B$不成立,$A\in C$成立,$A\subseteq C$不成立,故选AC.

10. ± 2 【解析】因为$\{a^2,0,-1\}=\{a,b,0\}$,所以①$\begin{cases}a^2=a,\\b=-1\end{cases}$或②$\begin{cases}a^2=b,\\a=-1.\end{cases}$由①得$\begin{cases}a=0,\\b=-1\end{cases}$或$\begin{cases}a=1,\\b=-1,\end{cases}$其中$\begin{cases}a=0,\\b=-1\end{cases}$不符合元素的互异性,$\begin{cases}a=1,\\b=-1\end{cases}$符合题意,此时$a-b=2$;由②得$\begin{cases}b=1,\\a=-1,\end{cases}$符合题意,此时$a-b=-2$.综上,$a-b$的值为$\pm 2$.

11. 7 【解析】$\because A=\{0,1\}$,$B=\{1,2\}$,$\therefore C=\{x\mid x=a+b,a\in A,b\in B\}=\{1,2,3\}$,$C$中有3个元素,$\therefore$集合$C$的真子集的个数为$2^3-1=7$.

12. $\{0,2,8\}$ 【解析】由题意,集合$A=\{x\mid 2ax^2+(2a-8)x+1=0\}$有且仅有两个子集,则集合$A$中只有一个元素.当$a=0$时,由$-8x+1=0$,解得$x=\frac{1}{8}$,符合题意.当$a\neq 0$时,由$\Delta=(2a-8)^2-4\times 2a\times 1=0$,解得$a=2$或$a=8$.当$a=2$时,$A=\{x\mid 4x^2-4x+1=0\}=\left\{\frac{1}{2}\right\}$,符合题意;当$a=8$时,$A=\{x\mid 16x^2+8x+1=0\}=\left\{-\frac{1}{4}\right\}$,符合题意.综上所述,$a$的取值集合为$\{0,2,8\}$.

13. 解:(1)由题意可知$M=\{0,1\}$,所以其子集为$\varnothing$,$\{0\}$,$\{1\}$,$\{0,1\}$,真子集为$\{0\}$,$\{1\}$,$\varnothing$.

(2)由题意可知$N=\{-1,0,1\}$,所以其子集为$\varnothing$,$\{-1\}$,$\{0\}$,$\{1\}$,$\{0,1\}$,$\{-1,0\}$,$\{-1,1\}$,$\{-1,0,1\}$,共有$2^3=8$(个),真子集为$\varnothing$,$\{-1\}$,$\{0\}$,$\{1\}$,$\{0,1\}$,$\{-1,0\}$,$\{-1,1\}$,共有$2^3-1=7$(个),非空真子集为$\{-1\}$,$\{0\}$,$\{1\}$,$\{0,1\}$,$\{-1,0\}$,$\{-1,1\}$,共有$2^3-2=6$(个).

14. 解:因为集合$A=\{x\mid 2x\leqslant 3x+1\leqslant 2x+4\}$,$B=\{x\mid m+1\leqslant x-m\leqslant 2\}$,所以集合$A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$,$B=\{x\mid 2m+1\leqslant x\leqslant m+2\}$.

(1)当$B=\varnothing$时,$2m+1>m+2$,解得$m>1$,此时满足$B\subseteq A$;

(2)当$B\neq\varnothing$时,要满足$B\subseteq A$,只需$\begin{cases}2m+1\leqslant m+2,\\2m+1\geqslant -1,\\m+2\leqslant 3,\end{cases}$解得$-1\leqslant m\leqslant 1$.

综上可得,实数m的取值范围为$m\geqslant -1$.

15. 6 【解析】$A=(x_1,x_2,x_3,x_4)$,由①②知,A中元素各不相等且$x_i\in\{0,1,2,3\}$,所以A有以下24种情况:$A=(0,1,2,3)$,$A=(0,1,3,2)$,$A=(0,2,1,3)$,$A=(0,2,3,1)$,$A=(0,3,1,2)$,$A=(0,3,2,1)$,$A=(1,0,2,3)$,$A=(1,0,3,2)$,$A=(1,2,0,3)$,$A=(1,2,3,0)$,$A=(1,3,0,2)$,$A=(1,3,2,0)$,$A=(2,0,1,3)$,$A=(2,0,3,1)$,$A=(2,1,0,3)$,$A=(2,1,3,0)$,$A=(2,3,0,1)$,$A=(2,3,1,0)$,$A=(3,0,1,2)$,$A=(3,0,2,1)$,$A=(3,1,0,2)$,$A=(3,1,2,0)$,$A=(3,2,0,1)$,$A=(3,2,1,0)$.因为集合$M=\{z\mid z=|x_i-y_i|\}$有7个真子集,所以M中有3个元素,即$|x_i-y_i|$有3种情况.由$B=(0,1,2,3)$,可得满足题意的有$A=(0,2,3,1)$,$A=(0,3,1,2)$,$A=(1,2,0,3)$,$A=(2,0,1,3)$,$A=(2,3,1,0)$,$A=(3,2,0,1)$,共6种情况.

16. 解:(1)因为集合$A=\{x\mid x^2+4x=0,x\in\mathbf{R}\}=\{-4,0\}$,$A=B$,所以$B=\{x\mid x^2+2(a+1)x+a^2-1=0,x\in\mathbf{R}\}=\{-4,0\}$,所以$-4$和0为方程$x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$的两个根,则$\begin{cases}-4+0=-2(a+1),\\-4\times 0=a^2-1,\end{cases}$解得$a=1$.

(2)①当$B=\varnothing$时,$\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)<0$,解得$a<-1$.

②当$B\neq\varnothing$时,若$B=\{0\}$,则$\begin{cases}0+0=-2(a+1),\\0\times 0=a^2-1,\end{cases}$解得$a=-1$;若$B=\{-4\}$,则$\begin{cases}-4-4=-2(a+1),\\-4\times(-4)=a^2-1,\end{cases}$无解;若$B=\{-4,0\}$,则$\begin{cases}-4+0=-2(a+1),\\-4\times 0=a^2-1,\end{cases}$解得$a=1$.综上所述,若$B\subseteq A$,则实数$a$的取值范围为$a\leqslant -1$或$a=1$.

1.3 集合的基本运算

第1课时 集合的并集、交集

1. A 【解析】集合$A=\{x\mid x-3\leqslant 0\}=\{x\mid x\leqslant 3\}$,$B=\{0,2,4\}$,则$A\cap B=\{0,2\}$.故选A.

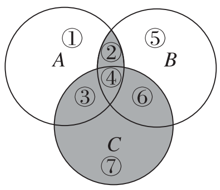
2. C 【解析】因为$A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 4\}$,$B=\{x\mid 2<x<5\}$,所以$A\cup B=\{x\mid 1\leqslant x<5\}$.故选C.

3. D 【解析】由题知，$A\cap C=\{1,2\}$，$\therefore (A\cap C)\cup B=\{1,2,3,4\}$. 故选 D.

4. A 【解析】由题意，集合 $A=\{1,3,\sqrt{m}\}$，$B=\{1,m\}$，因为 $A\cup B=A$，所以 $B\subseteq A$，则满足 $\begin{cases}m=3,\\ m\neq 1,\\ \sqrt{m}\neq 3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=\sqrt{m},\\ m\neq 1,\\ \sqrt{m}\neq 3,\end{cases}$ 解得 $m=3$ 或 $m=0$. 故选 A.

5. D 【解析】对于 A，当 $A=\{1,2\}$，$B=\{1\}$，$C=\{1,2,3\}$ 时，满足 $A\cap B=B\cap C$，但 $A=C$ 不成立，故 A 错误；对于 B，当 $A=\{1,2\}$，$B=\{3\}$，$C=\{1,2,3\}$ 时，满足 $A\cup B=B\cup C$，但 $A=C$ 不成立，故 B 错误；对于 C，当 $A=\{1\}$，$B=\{1,2\}$，$C=\{1,2,3\}$ 时，满足 $A\cup B=B\cap C$，但 $C\subseteq B$ 不成立，故 C 错误；对于 D，因为 $(A\cap B)\subseteq B$，$A\cap B=B\cup C$，所以 $(B\cup C)\subseteq B$，又 $B\subseteq (B\cup C)$，所以 $B=B\cup C$，则 $C\subseteq B$，故 D 正确. 故选 D.

6. A 【解析】如图所示，$A\cup C$ 表示的区域为①②③④⑥⑦，$B\cup C$ 表示的区域为②③④⑤⑥⑦，所以 $(A\cup C)\cap(B\cup C)$ 表示的区域为②③④⑥⑦，故 A 正确；$A\cup B$ 表示的区域为①②③④⑤⑥，所以 $(A\cup B)\cap(A\cup C)$ 表示的区域为①②③④⑥，故 B 错误；$(A\cup B)\cap(B\cup C)$ 表示的区域为②③④⑤⑥，故 C 错误；$(A\cup B)\cap C$ 表示的区域为③④⑥，故 D 错误. 故选 A.



7. A 【解析】由题可知，当 $A=\varnothing$ 时，满足 $A\cap B=\varnothing$，此时 $\Delta=a^2-4<0$，解得 $-2<a<2$；当 $A\neq\varnothing$ 时，设方程 $x^2-ax+1=0$ 的两个实数根为 x_1，x_2，因为 $A\cap B=\varnothing$，所以 $x_1\leqslant 0$，$x_2\leqslant 0$，所以 $\begin{cases}x_1+x_2=a\leqslant 0,\\ x_1x_2=1\geqslant 0,\\ \Delta=a^2-4\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $a\leqslant -2$. 综上，$a<2$. 故选 A.

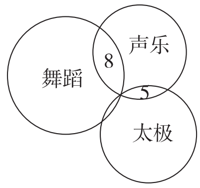
8. BC 【解析】由题意得 $A=\{-2,2\}$，$B=\{y\mid y\geqslant -4\}$，所以 $A\cap B=\{-2,2\}=A$，$A\cup B=\{y\mid y\geqslant -4\}=B$. 故选 BC.

9. AB 【解析】$A=\{x\in\mathbf{Z}\mid -5<x<2\}=\{-4,-3,-2,-1,0,1\}$，$B=\{x\mid x^2+2ax+a^2-4=0\}=\{-a-2,-a+2\}$. 因为 $-a+2-(-a-2)=4$，且 $A\cap B$ 中恰有 2 个元素，所以 $\begin{cases}-a-2=-4,\\ -a+2=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-a-2=-3,\\ -a+2=1,\end{cases}$ 解得 $a=2$ 或 $a=1$. 故选 AB.

10. $\{(12,1),(6,2),(4,3)\}$ 【解析】由 $\begin{cases}xy=12,\\ x,y\in\mathbf{N},\\ y<x,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=12,\\ y=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=6,\\ y=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=4,\\ y=3,\end{cases}$ $\therefore A\cap B=\{(12,1),(6,2),(4,3)\}$.

11. -2 【解析】集合 $A=\{-2,2a+1,a^2-1\}$，$B=\{3,2-a,2a-4\}$，且 $A\cap B=\{3\}$，则 $2a+1=3$ 或 $a^2-1=3$，解得 $a=1$ 或 $a=\pm 2$. 当 $a=1$ 时，$A=\{-2,3,0\}$，$B=\{3,1,-2\}$，此时 $A\cap B=\{-2,3\}$，不满足题意；当 $a=-2$ 时，$A=\{-2,-3,3\}$，$B=\{3,4,-8\}$，此时 $A\cap B=\{3\}$，满足题意；当 $a=2$ 时，集合 B 中 $2-a=2a-4=0$，不满足集合中元素的互异性，故舍去. 综上所述，$a=-2$.

12. ②③④ 【解析】如图，设同时报名舞蹈和报名太极的有 x 人，则 $45+26+33-90=5+8+x$，解得 $x=1$，所以同时报名舞蹈和报名太极的有 1 人，只报名舞蹈的有 $45-8-1=36$(人)，只报名声乐的有 $33-8-5=20$(人)，报名两门课程的有 $8+5+1=14$(人). 故正确的结论为②③④.



13. 解：(1)因为集合 $A=\{x\mid 4\leqslant x<8\}$，$B=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 10\}$，
所以 $A\cup B=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 10\}$.
(2)因为 $C=\{x\mid x<2a\}$，$A\cap C\neq\varnothing$，
所以 $2a>4$，解得 $a>2$.

14. 解：因为 $A\cap B=\{3\}$，所以 3 是方程 $x^2+cx+6=0$ 的根，则 $3^2+3c+6=0$，解得 $c=-5$，所以 $B=\{x\mid x^2-5x+6=0\}=\{3,2\}$. 因为 $A\cup B=\{2,3\}$，$A\cap B=\{3\}$，所以 $A\neq B$，则 $A=\{3\}$，所以方程 $x^2+ax+b=0$ 有两个相等的实数根 3，所以 $\begin{cases}\Delta=a^2-4b=0,\\ 9+3a+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-6,\\ b=9.\end{cases}$
综上，$a=-6$，$b=9$，$c=-5$.

15. BD 【解析】对于 A 选项，$M=\{x\in\mathbf{Q}\mid x<0\}$，$N=\{x\in\mathbf{Q}\mid x>0\}$，故 $M\cup N=\{x\in\mathbf{Q}\mid x\neq 0\}\neq\mathbf{Q}$，A 错误；对于 B 选项，设 $M=\{x\in\mathbf{Q}\mid x<0\}$，$N=\{x\in\mathbf{Q}\mid x\geqslant 0\}$，则满足 $M\cup N=\mathbf{Q}$，$M\cap N=\varnothing$，此时 (M,N) 为戴德金分割，且 M 没有最大元素，N 有一个最小元素，B 正确；对于 C 选项，若 M 有一个最大元素，N 有一个最小元素，则 $M\cap N\neq\varnothing$，C 错误；对于 D 选项，设 $M=\{x\in\mathbf{Q}\mid x<\sqrt{2}\}$，$N=\{x\in\mathbf{Q}\mid x\geqslant\sqrt{2}\}$，则满足 $M\cup N=\mathbf{Q}$，$M\cap N=\varnothing$，此时 (M,N) 为戴德金分割，且 M 没有最大元素，N 也没有最小元素，D 正确. 故选 BD.

16. 解：(1)由题可知，$A=\{-5,1\}$，因为 $A\cap B=\{1\}$，所以 $1\in B$，即 $x=1$ 是方程 $x^2+2(a+2)x+a^2+2a-2=0$ 的根，则有 $1+2(a+2)+a^2+2a-2=0$，即 $a^2+4a+3=0$，解得 $a=-1$ 或 $a=-3$.
当 $a=-1$ 时，$B=\{x\mid x^2+2x-3=0\}=\{1,-3\}$，满足 $A\cap B=\{1\}$，符合题意；当 $a=-3$ 时，$B=\{x\mid x^2-2x+1=0\}=\{1\}$，满足 $A\cap B=\{1\}$，符合题意.
综上，实数 a 的值为 -1 或 -3.
(2)因为 $A\cup B=A$，所以 $B\subseteq A$. 当 $B=\varnothing$ 时，$\Delta=[2(a+2)]^2-4(a^2+2a-2)=8a+24<0$，解得 $a<-3$；
当 $B=\{1\}$ 时，由(1)知，$a=-3$，符合题意；当 $B=\{-5\}$ 时，可得 $\begin{cases}(-5)^2+2(a+2)\times(-5)+a^2+2a-2=0,\\ \Delta=[2(a+2)]^2-4(a^2+2a-2)=8a+24=0,\end{cases}$ 无解；
当 $B=\{1,-5\}$ 时，可得 $\begin{cases}(-5)^2+2(a+2)\times(-5)+a^2+2a-2=0,\\ 1^2+2(a+2)+a^2+2a-2=0,\end{cases}$
无解.
综上，实数 a 的取值范围是 $a\leqslant -3$.

第 2 课时 集合的全集、补集

1. B 【解析】因为 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{2,4,6\}$，所以 $\complement_U A=\{1,3,5\}$. 故选 B.

2. C 【解析】因为 $U=\{-3,-2,1,2,3\}$，$B=\{-3,2,3\}$，所以 $\complement_U B=\{-2,1\}$，又 $A=\{1,2\}$，故 $A\cap(\complement_U B)=\{1\}$，故选 C.

3. B 【解析】因为 $U=\{-1,0,1,2,3\}$，$\complement_U A=\{0,1,3\}$，所以 $A=\{-1,2\}$. 故选 B.

4. B 【解析】根据题意可得 $\complement_U A=\{2,4,6\}$,则 $\complement_U A$ 的非空子集有 $2^3-1=7$(个). 故选 B.

5. B 【解析】因为 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$,$A=\{1,2,3\}$,$B=\{2,3,4,5\}$,所以 $\complement_U A=\{4,5,6\}$,$\complement_U B=\{1,6\}$,所以 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{6\}$. 故选 B.

6. D 【解析】学校规定,每个参加上述比赛的同学最多只能参加两项比赛,故没有同学参加三项比赛,即 $(A\cap B)\cap C=\varnothing$. 故选 D.

7. C 【解析】因为集合 $B=\{x|x\geqslant 2\}$,所以 $\complement_{\mathbf{R}} B=\{x|x<2\}$. 由集合 $A=\{x|x\leqslant a\}$,$A\cup(\complement_{\mathbf{R}} B)=A$,可得 $(\complement_{\mathbf{R}} B)\subseteq A$,所以 $a\geqslant 2$. 故选 C.

8. BD 【解析】根据题意可知,阴影中的元素属于集合 N 但不属于集合 M,根据选项知,$(\complement_U M)\cap N$,$N\cap\complement_U(M\cap N)$ 符合要求. 故选 BD.

9. BCD 【解析】对于 A,因为 $A=\{4,5,6,7,9\}$,$B=\{3,5,6,8,9\}$,所以 $B-A=\{3,8\}$,故 A 错误;对于 B,因为 $A=\{x|x<-1$ 或 $x>3\}$,$B=\{x|-2\leqslant x<4\}$,所以 $A-B=\{x|x<-2$ 或 $x\geqslant 4\}$,故 B 正确;对于 C,若 $A-B=\varnothing$,则 A 中的元素都是 B 中的元素,所以 $A\subseteq B$,故 C 正确;对于 D,$A-B$ 即 B 的补集与集合 A 的交集,即 $A-B=A\cap(\complement_U B)$,故 D 正确. 故选 BCD.

10. 2 【解析】$\because A=\{x|1\leqslant x<a\}$,$\complement_U A=\{x|2\leqslant x\leqslant 5\}$,$\therefore A\cup(\complement_U A)=U=\{x|1\leqslant x\leqslant 5\}$,且 $A\cap(\complement_U A)=\varnothing$,因此 $a=2$.

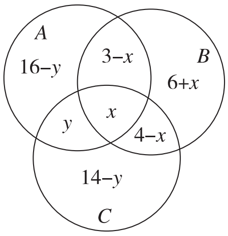
11. 0 【解析】由集合 $A=\{2,m+1\}$,可得 $m+1\neq 2$,解得 $m\neq 1$,又由 $\complement_U A=\{m\}$ 且 $U=\{1,2,m^2\}$,可得 $\begin{cases}m^2=m,\\ m+1=1,\end{cases}$ 解得 $m=0$,经验证 $m=0$ 满足条件,所以实数 m 的值为 0.

12. $a<1$ 或 $a>1$ 【解析】$\because A=\{x|x>1$ 或 $x<-2\}$,$\therefore \complement_U A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 1\}$. ①当 $a>2a-1$,即 $a<1$ 时,$B=\varnothing$,满足题意;②当 $a\leqslant 2a-1$,即 $a\geqslant 1$ 时,$\because(\complement_U A)\cap B=\varnothing$,$\therefore a>1$ 或 $2a-1<-2$,可得 $a>1$. $\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $a<1$ 或 $a>1$.

13. **解**:(1)$A\cap B=\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$.
(2)$A\cup B=\{x|-1\leqslant x\leqslant 4\}$,故 $\complement_U(A\cup B)=\{x|x<-1$ 或 $4<x\leqslant 5\}$.
(3)$\complement_U A=\{x|x<1$ 或 $2<x\leqslant 5\}$,$\complement_U B=\{x|x<-1$ 或 $4<x\leqslant 5\}$,故 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{x|x<-1$ 或 $4<x\leqslant 5\}$.

14. **解**:(1)$\because$ 集合 A 中恰有一个元素,$\therefore \Delta=16-4a=0$,解得 $a=4$.
(2)$\because(\complement_U A)\cap B=\{2\}$,$\therefore 2\in B$,则 $4+2b-2=0$,解得 $b=-1$. $\because(\complement_U B)\cap A=\{-3\}$,$\therefore -3\in A$,则 $9-12+a=0$,解得 $a=3$,则 $A=\{x|x^2+4x+3=0\}=\{-1,-3\}$,$B=\{x|x^2-x-2=0\}=\{-1,2\}$. 检验可知 $(\complement_U A)\cap B=\{2\}$,$(\complement_U B)\cap A=\{-3\}$成立,$\therefore A\cup B=\{-3,-1,2\}$.

15. 29 【解析】记第一天、第二天、第三天参加的志愿者分别构成集合 A,B,C,三天都参加的志愿者人数为 x,第一天和第三天都参加的志愿者人数为 $x+y$,根据题意可作出 Venn 图如图. 依题意必有 x,y,$3-x$,$14-y$ 均为自然数,所以 $0\leqslant x\leqslant 3$,$0\leqslant y\leqslant 14$,故这三天参加的不同志愿者的总人数为 $19+(6+x)+(4-x)+(14-y)=43-y$,故当 $y=14$ 时,总人数最少,最少为 $43-14=29$.



16. **解**:(1)族 $P=\{\varnothing,X\}$,族 $Q=\{x|x\subseteq X\}$ 都是集合 X 的拓扑.
(2)证明:设 $x\in\complement_X(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)$,则 $x\notin(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)$,故存在整数 $i(1\leqslant i\leqslant n)$,使得 $x\notin A_i$,因此 $x\in\complement_X A_i$,得 $x\in[(\complement_X A_1)\cup(\complement_X A_2)\cup\cdots\cup(\complement_X A_n)]$.
设 $x\in[(\complement_X A_1)\cup(\complement_X A_2)\cup\cdots\cup(\complement_X A_n)]$,则存在整数 $j(1\leqslant j\leqslant n)$,使得 $x\in\complement_X A_j$,故 $x\notin A_j$,
因此 $x\notin(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)$,得 $x\in\complement_X(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)$. 故 $\complement_X(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)=(\complement_X A_1)\cup(\complement_X A_2)\cup\cdots\cup(\complement_X A_n)(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 2)$.

滚动习题(一)

1. A 【解析】因为集合 $A=\{4,5,6\}$,$B=\{3,6,5\}$,所以 $A\cup B=\{3,4,5,6\}$. 故选 A.

2. C 【解析】因为 $A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 4,x\in\mathbf{N}\}$,即 $A=\{0,1,2,3,4\}$,所以集合 A 中的元素个数为 5,故选 C.

3. C 【解析】因为集合 $A=\{1,3\}$,$B=\{2,4\}$,所以 $A\cup B=\{1,2,3,4\}$,又全集 $U=\{x\in\mathbf{N}|x<6\}=\{0,1,2,3,4,5\}$,所以 $\complement_U(A\cup B)=\{0,5\}$,故选 C.

4. A 【解析】因为 $A\cap B=\{1,2\}$,所以 $1\in B$,$2\in B$,$3\notin B$,$5\notin B$,故 $B=\{1,2\}$或$\{1,2,4\}$或$\{1,2,6\}$或$\{1,2,4,6\}$,共 4 个. 故选 A.

5. D 【解析】因为 $A\cup B=A$,所以 $B\subseteq A$. 当 $B=\varnothing$时,$\Delta=a^2-16<0$,即$-4<a<4$,满足题意. 当 $B\neq\varnothing$时,若 $\Delta=a^2-16=0$,则 $a=-4$ 或 4,当 $a=-4$ 时,$B=\{-2\}$,满足题意;当 $a=4$ 时,$B=\{2\}$,满足题意. 若 $\Delta=a^2-16>0$,则-2,2 是方程 $x^2-ax+4=0$ 的两根,显然$-2\times 2=-4\neq 4$,故不合题意. 综上,实数 a 的取值集合为$\{a|-4\leqslant a\leqslant 4\}$. 故选 D.

6. D 【解析】当 $a=3$ 时,$M=\{3\}$,$M\cap N=\varnothing$,$M\cup N=\{1,3,4\}$;当 $a=1$ 时,$M=\{1,3\}$,$M\cap N=\{1\}$,$M\cup N=\{1,3,4\}$;当 $a=4$ 时,$M=\{3,4\}$,$M\cap N=\{4\}$,$M\cup N=\{1,3,4\}$;当 $a\neq 1,3,4$ 时,$M=\{3,a\}$,$M\cap N=\varnothing$,$M\cup N=\{1,3,4,a\}$. 综上可知,A,B,C 不正确,D 正确. 故选 D.

7. AC 【解析】由题意可知 $3\notin M$ 且 $4\notin M$,而-2 和 2 均需与 4 同时出现,所以$-2\notin M$ 且 $2\notin M$,所以满足条件的非空集合 M 有$\{-1,1\}$,$\{1\}$. 故选 AC.

8. ACD 【解析】因为 $23=3\times 7+2=5\times 4+3=7\times 3+2$,所以 $23\in(A\cap B\cap C)$,故 A 正确;因为 $38=7\times 5+3$,所以 $38\notin C$,故 B 错误;因为 $128=3\times 42+2=5\times 25+3=7\times 18+2$,所以 $128\in(A\cap B\cap C)$,故 C 正确;因为 $233=3\times 77+2=5\times 46+3=7\times 33+2$,所以 $233\in(A\cap B\cap C)$,故 D 正确. 故选 ACD.

9. $\{1,2,3,6\}$ 【解析】$\because a\in\mathbf{N}$,$\dfrac{6}{a}\in\mathbf{N}$,$\therefore$ 当 $a=1$ 时,$\dfrac{6}{a}=6$,当 $a=2$ 时,$\dfrac{6}{a}=3$,当 $a=3$ 时,$\dfrac{6}{a}=2$,当 $a=6$ 时,$\dfrac{6}{a}=1$,
$\therefore$ 集合$\left\{a\,\middle|\,\dfrac{6}{a}\in\mathbf{N},a\in\mathbf{N}\right\}=\{1,2,3,6\}$.

10. 7 【解析】对于 $x+y=4$,x,$y\in\mathbf{N}^*$,可知$\begin{cases}x\geqslant 1,\\ y=4-x\geqslant 1,\end{cases}$ 解

得 $1\leqslant x\leqslant 3$，又 $x,y\in\mathbf{N}^*$，可得 $\begin{cases}x=1,\\y=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2,\\y=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=3,\\y=1,\end{cases}$ 即 $A=\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$，A 中有 3 个元素，所以 A 的真子集有 $2^3-1=7$(个).

11. $\{-3,-1,0,1,2\}$ 【解析】全集 $U=\{x\in\mathbf{Z}|-5<x\leqslant 4\}=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$，$A\cap B=\varnothing$，则 $(\complement_U A)\cap B=B=\{-2,3\}$，$(\complement_U B)\cap A=A=\{-4,4\}$，所以 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{-3,-1,0,1,2\}$.

12. 9　8　10 【解析】由题意得 $\begin{cases}28+a+b+6=51,\\35+a+c+6=60,\\26+b+c+6=50,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=9,\\b=8,\\c=10.\end{cases}$

13. 解：(1)当 $a=-1$ 时，$A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$，所以 $A\cap B=\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$，所以 $(A\cap B)\cup C=\{x|x\leqslant 2$ 或 $x>3\}$.

(2)因为 $A\cup C=\mathbf{R}$，所以 $\begin{cases}2a\leqslant 1,\\a+3\geqslant 3,\end{cases}$ 解得 $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$.

又 a 为整数，所以 $a=0$，所以 $A=\{x|0\leqslant x\leqslant 3\}$，

所以 $\complement_B A=\{x|-1\leqslant x<0$ 或 $3<x\leqslant 7\}$.

14. 解：(1)若 $a=0$，则方程可化为 $2x+1=0$，此时方程有且仅有一个根 $x=-\frac{1}{2}$，满足题意；

若 $a\neq 0$，则当且仅当方程的判别式 $\Delta=4-4a=0$，即 $a=1$ 时，方程有两个相等的实根 $x_1=x_2=-1$，此时集合 A 中有且仅有一个元素.

$\therefore B=\{0,1\}$.

(2)集合 A 中至多有一个元素包括两种情况：

①A 中有且仅有一个元素，由(1)可知此时 $a=0$ 或 $a=1$；

②A 中一个元素也没有，即 $A=\varnothing$，此时 $a\neq 0$，且 $\Delta=4-4a<0$，解得 $a>1$.

综上可知，a 的取值范围为 $a\geqslant 1$ 或 $a=0$.

15. 解：(1)当 $m=1$ 时，集合 $B=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$，

又 $A=\{x|-1<x<2\}$，$\therefore A\cup B=\{x|-1<x\leqslant 2\}$.

(2)选① $\complement_{\mathbf{R}}A\subseteq\complement_{\mathbf{R}}B$，则 $A\supseteq B$.

当 $B=\varnothing$ 时，$m-1>m+1$，无解；

当 $B\neq\varnothing$ 时，可得 $\begin{cases}m-1\leqslant m+1,\\m-1>-1,\\m+1<2,\end{cases}$ 解得 $0<m<1$.

综上，实数 m 的取值范围是 $0<m<1$.

选② $A\cup B=A$，则 $B\subseteq A$.

当 $B=\varnothing$ 时，$m-1>m+1$，无解；

当 $B\neq\varnothing$ 时，可得 $\begin{cases}m-1\leqslant m+1,\\m-1>-1,\\m+1<2,\end{cases}$ 解得 $0<m<1$.

综上，实数 m 的取值范围是 $0<m<1$.

选③ $A\cap B=B$，则 $B\subseteq A$. 当 $B=\varnothing$ 时，$m-1>m+1$，无解；

当 $B\neq\varnothing$ 时，可得 $\begin{cases}m-1\leqslant m+1,\\m-1>-1,\\m+1<2,\end{cases}$ 解得 $0<m<1$.

综上，实数 m 的取值范围是 $0<m<1$.

1.4　充分条件与必要条件

1.4.1　充分条件与必要条件

1. D 【解析】$a>2\Rightarrow a>1$，故选 D.

2. A 【解析】由 $-5x+3\geqslant 0$，得 $x\leqslant\frac{3}{5}$，因为 $\{x|x<0\}\subseteq\left\{x\middle|x\leqslant\frac{3}{5}\right\}$，所以使不等式 $-5x+3\geqslant 0$ 成立的一个充分条件是 $x<0$，而其他选项皆不满足. 故选 A.

3. A 【解析】对于 A，$a=\sqrt{2}$ 是无理数，$a^2=2$ 是有理数，所以 p 不是 q 的充分条件；对于 B，因为等腰梯形的对角线相等，所以 p 是 q 的充分条件；对于 C，$x>2\Rightarrow x\geqslant 1$，所以 p 是 q 的充分条件；对于 D，当 $a=b$ 时，$ac^2=bc^2$，所以 p 是 q 的充分条件. 故选 A.

4. A 【解析】因为 $Q=\{x|x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 5\}$，所以 $\complement_{\mathbf{R}}Q=\{x|0<x<5\}$，所以 $P\subsetneqq\complement_{\mathbf{R}}Q$，所以“$x\in P$”是“$x\in\complement_{\mathbf{R}}Q$”的充分不必要条件，故选 A.

5. C 【解析】由题意可得 $\{x|0<x<1\}\subseteq\{x|-a<x<a\}$，所以 $-a\leqslant 0$ 且 $a\geqslant 1$，解得 $a\geqslant 1$. 故选 C.

6. D 【解析】对于 A，$a-b=0$，即 $a=b$，因为 $a,b\in\mathbf{R}$，所以 $ab=0$ 不一定成立，故 A 错误；对于 B，$a+b=0$，即 $a=-b$，因为 $a,b\in\mathbf{R}$，所以 $ab=0$ 不一定成立，故 B 错误；对于 C，$a^2-b^2=0$，即 $|a|=|b|$，因为 $a,b\in\mathbf{R}$，所以 $ab=0$ 不一定成立，故 C 错误；对于 D，$a^2+b^2=0$，即 $\begin{cases}a=0,\\b=0,\end{cases}$ 则 $ab=0$ 成立，故 D 正确. 故选 D.

7. C 【解析】对于 A，$\mathbf{Q}$ 是 $\mathbf{R}$ 的真子集，故 $a\in\mathbf{Q}$ 是 $a\in\mathbf{R}$ 的充分不必要条件，故 A 中说法正确. 对于 B，取 $x=1$，$y=-1$，满足 $|x|=|y|$，但不满足 $x=y$；当 $x=y$ 时，必有 $|x|=|y|$. 故 $|x|=|y|$ 是 $x=y$ 的必要不充分条件，故 B 中说法正确. 对于 C，取 $x=-2$，则满足 $x^2>1$，但不满足 $x>1$；当 $x>1$ 时，$x^2>1$ 一定成立. 故 $x^2>1$ 是 $x>1$ 的必要不充分条件，故 C 中说法错误. 对于 D，取 $a=1$，$b=-2$，则满足 $a+b<0$，但不满足 $a<0$ 且 $b<0$；当 $a<0$ 且 $b<0$ 时，$a+b<0$ 一定成立. 故 $a+b<0$ 是 $a<0$ 且 $b<0$ 的必要不充分条件，故 D 中说法正确. 故选 C.

8. BC 【解析】对于 A，若灯泡 L 亮，则可能是开关 S_2 闭合，S_1 不闭合，$\therefore A$ 不是 B 的必要条件；对于 B，只有一个开关，若灯泡 L 要亮，则开关 S_1 必须闭合，$\therefore A$ 是 B 的必要条件；对于 C，$\because$ 只有 S_1 和 S_2 同时闭合，灯泡 L 才能亮，$\therefore A$ 是 B 的必要条件；对于 D，灯一直亮，与开关 S_1 是否闭合没有关系，$\therefore A$ 不是 B 的必要条件. 故选 BC.

9. BD 【解析】因为集合 $A=\{x|-1<x<3\}$，集合 $B=\{x|x<m+1\}$，所以 $A\cap B=\varnothing$ 等价于 $m+1\leqslant -1$，即 $m\leqslant -2$. 对比选项，可得 $m<-2$，$-4<m<-3$ 均为 $A\cap B=\varnothing$ 的充分不必要条件. 故选 BD.

10. 充分不必要 【解析】由正方形的定义知，若四边形 $ABCD$ 是正方形，则四边形 $ABCD$ 的四个角都是直角，所以由 α 可以推出 β，即 α 是 β 的充分条件；当四边形 $ABCD$ 的四个角都是直角时，四边形 $ABCD$ 可以为矩形，所以由 β 推不出 α，即 α 不是 β 的必要条件. 故 α 是 β 的充分不必要条件.

11. $x>2$(答案不唯一) 【解析】因为 $2x>3$，所以 $x>\frac{3}{2}$，所以

使 $2x>3$ 成立的一个充分不必要条件构成的集合为 $\left\{x \middle| x>\dfrac{3}{2}\right\}$ 的真子集,所以充分不必要条件可以为 $x>2$(答案不唯一).

12. $m>0$ 【解析】若 p:方程 $ax^2+2x+1=0$ 至少有一个负实根为真命题,则当 $a=0$ 时,由 $2x+1=0$,得 $x=-\dfrac{1}{2}$,符合题意.当 $a<0$ 时,$\Delta=4-4a>0$,设方程 $ax^2+2x+1=0$ 的两个实根分别为 x_1,x_2,则 $x_1+x_2=-\dfrac{2}{a}>0$,$x_1x_2=\dfrac{1}{a}<0$,则此时方程 $ax^2+2x+1=0$ 有一个正根和一个负根,符合题意.当 $a>0$ 时,若 $\Delta=4-4a=0$,则 $a=1$,此时方程为 $x^2+2x+1=(x+1)^2=0$,解得 $x=-1$,符合题意;若 $\Delta=4-4a>0$,则 $0<a<1$,设方程 $ax^2+2x+1=0$ 的两个实根分别为 x_1,x_2,则 $x_1+x_2=-\dfrac{2}{a}<0$,$x_1x_2=\dfrac{1}{a}>0$,则此时方程 $ax^2+2x+1=0$ 有两个负根,符合题意.综上所述,当 p 为真命题时,a 的取值范围是 $a\leqslant 1$.若 p 为真命题的一个必要不充分条件为 $a\leqslant m+1$,则 $m+1>1$,解得 $m>0$.

13. **解:**(1)当 $x>y$ 时,$|x|>|y|$ 不一定成立,当 $|x|>|y|$ 时,$x>y$ 也不一定成立,故 p 是 q 的既不充分也不必要条件.
(2)当 $a\in\mathbf{N}$ 时,$a\in\mathbf{Z}$ 成立,当 $a\in\mathbf{Z}$ 时,$a\in\mathbf{N}$ 不一定成立,故 p 是 q 的充分不必要条件.
(3)当点 D 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 的中线上时,$S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ACD}$,当 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ACD}$ 时,点 D 不一定在 $\triangle ABC$ 的边 BC 的中线上,故 p 是 q 的充分不必要条件.

14. **解:**(1)①当 $B=\varnothing$ 时,$2m\geqslant 1-m$,解得 $m\geqslant\dfrac{1}{3}$,满足题意;
②当 $B\neq\varnothing$ 时,若 $A\cap B=\varnothing$,则 $\begin{cases}2m<1-m,\\1-m\leqslant 1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2m<1-m,\\2m\geqslant 3,\end{cases}$ 解得 $0\leqslant m<\dfrac{1}{3}$.
综上所述,实数 m 的取值范围为 $m\geqslant 0$.
(2)若 p 是 q 的充分条件,则 $A\subseteq B$,所以 $\begin{cases}2m\leqslant 1,\\1-m\geqslant 3,\end{cases}$ 解得 $m\leqslant -2$,所以实数 m 的取值范围为 $m\leqslant -2$.

15. $m\geqslant 1$ 【解析】对于集合 $A=\{y|y=x-[x]\}$,可设 $k\leqslant x<k+1(k\in\mathbf{Z})$,由 $[x]$ 的定义可知,$0\leqslant y=x-[x]=x-k<1$,所以 $A=\{y|y=x-[x]\}=\{y|0\leqslant y<1\}$.若 $y\in A$ 是 $y\in B$ 的充分不必要条件,则 $A\subsetneqq B$,所以 m 的取值范围是 $m\geqslant 1$.

16. **解:**(1)由 $x\in A$ 是 $x\in B$ 的充分不必要条件,得 $A\subsetneqq B$,故 $\begin{cases}2-m\leqslant -2,\\2m-3\geqslant 3,\end{cases}$ 且两个等号不同时成立,所以 $m\geqslant 4$,即实数 m 的取值范围为 $m\geqslant 4$.
(2)因为 $A\cap B=B$,所以 $B\subseteq A$.
当 $B=\varnothing$ 时,$2-m>2m-3$,所以 $m<\dfrac{5}{3}$,满足题意;
当 $B\neq\varnothing$ 时,若 $B\subseteq A$,则 $\begin{cases}m\geqslant\dfrac{5}{3},\\-2\leqslant 2-m,\\2m-3\leqslant 3,\end{cases}$ 解得 $\dfrac{5}{3}\leqslant m\leqslant 3$.
综上,实数 m 的取值范围为 $m\leqslant 3$.

1.4.2 充要条件

1. A 【解析】因为 $\{x|x>4\}$ 是 $\{x|x>2\}$ 的真子集,所以"$x>4$"是"$x>2$"的充分不必要条件.故选 A.

2. C 【解析】根据相似三角形的性质得,由"两个三角形相似"可得到"两个三角形的三边对应成比例",即充分性成立;反之,由"两个三角形的三边成对应比例"可得到"两个三角形相似",即必要性成立.所以"两个三角形相似"是"两个三角形的三边对应成比例"的充要条件.故选 C.

3. B 【解析】当 $a=0$ 且 $b>-1$ 时,不等式 $ax-b\geqslant 1\Leftrightarrow -b\geqslant 1$,此时不等式 $ax-b\geqslant 1$ 的解集为 $\varnothing$;当 $a=0$ 且 $b\leqslant -1$ 时,不等式 $ax-b\geqslant 1\Leftrightarrow -b\geqslant 1\Leftrightarrow b\leqslant -1$,此时不等式 $ax-b\geqslant 1$ 的解集为 $\mathbf{R}$;当 $a>0$ 时,不等式 $ax-b\geqslant 1$ 的解集为 $\left\{x \middle| x\geqslant\dfrac{b+1}{a}\right\}$;当 $a<0$ 时,不等式 $ax-b\geqslant 1$ 的解集为 $\left\{x \middle| x\leqslant\dfrac{b+1}{a}\right\}$.综上,"$a=0$"是"关于 x 的不等式 $ax-b\geqslant 1$ 的解集为 $\mathbf{R}$"的必要不充分条件.故选 B.

4. B 【解析】因为 $A=\{x|x=3k,k\in\mathbf{N}\}$,$B=\{x|x=6z,z\in\mathbf{N}\}$,所以 $B\subsetneqq A$,所以"$x\in A$"是"$x\in B$"的必要不充分条件,故选 B.

5. C 【解析】因为一元二次方程 $ax^2+2x+1=0(a\neq 0)$ 有一个正根和一个负根,所以 $\begin{cases}4-4a>0,\\\dfrac{1}{a}<0,\end{cases}$ 解得 $a<0$,所以一元二次方程 $ax^2+2x+1=0(a\neq 0)$ 有一个正根和一个负根的充分不必要条件可以是 $a<-1$.故选 C.

6. C 【解析】因为 p 是 r 的充分条件,所以 $p\Rightarrow r$.因为 q 是 r 的充分不必要条件,所以 $q\Rightarrow r$,$r\nRightarrow q$.因为 s 是 r 的必要条件,所以 $r\Rightarrow s$.因为 p 是 s 的必要条件,所以 $s\Rightarrow p$.由 $p\Rightarrow r$,$r\Rightarrow s$,$s\Rightarrow p$ 可得 $p\Leftrightarrow r\Leftrightarrow s$,则 r 是 p 的充要条件,命题①为假命题;r 是 s 的充要条件,命题②为假命题;因为 $q\Rightarrow r$,$r\nRightarrow q$,所以 $q\Rightarrow p$,$p\nRightarrow q$,故 q 是 p 的充分不必要条件,命题③为真命题;易得 $s\nRightarrow q$,$q\Rightarrow s$,所以 s 是 q 的必要不充分条件,命题④为假命题.故选 C.

7. D 【解析】因为 p:$\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$,$q$:$a\leqslant x\leqslant a+1$,$q$ 是 p 的必要不充分条件,所以 $\begin{cases}a\leqslant\dfrac{1}{2},\\a+1\geqslant 1,\end{cases}$ 且两个等号不同时成立,解得 $0\leqslant a\leqslant\dfrac{1}{2}$,经检验满足题意.故选 D.

8. ACD 【解析】由 $a>0$,$b>0$ 可以推出 $ab>0$,反之推不出,故 A 满足题意.当 $a=5$,$b=-4$ 时,满足 $a+b>0$,但不满足 $ab>0$,故 B 不满足题意.由 $a<0$,$b<0$ 可以推出 $ab>0$,反之推不出,故 C 满足题意.由 $a>1$,$b>1$ 可以推出 $ab>0$,反之推不出,故 D 满足题意.故选 ACD.

9. AD 【解析】对于 A,在 $\triangle ABC$ 中,设 AB 边上的高为 h_1,AC 边上的高为 h_2,若 p 成立,不妨设 $h_1=h_2$,则由 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot h_1\cdot AB=\dfrac{1}{2}\cdot h_2\cdot AC$,得 $AB=AC$,即 q 成立;若 q 成立,不妨设 $AB=AC$,则由 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot h_1\cdot AB=\dfrac{1}{2}\cdot h_2\cdot$

AC,得 $h_1=h_2$,即 p 成立.故 A 满足题意;对于 B,当 $x=1-\sqrt{2}$,$y=1+\sqrt{2}$ 时,$x+y=1-\sqrt{2}+1+\sqrt{2}=2$ 为有理数,此时 p 成立,q 不成立,故 B 不满足题意;对于 C,当 $a=b=0$ 时,p 成立,q 不成立,故 C 不满足题意;对于 D,若 p 成立,则当 $x=1$ 时,$y=a+b+c=0$,即 q 成立,当 q 成立时,显然 p 成立,故 D 满足题意.故选 AD.

10. ①②③ **【解析】** 由①②③均可推出"两条直线平行",由"两条直线平行"也可以推出①②③.由④不能推出"两条直线平行".故填①②③.

11. 充要 **【解析】** 由题意可得 $A\cup B=\{x\mid x<0$ 或 $x>2\}$,即 $A\cup B=C$,所以"$x\in(A\cup B)$"是"$x\in C$"的充要条件.

12. -2 **【解析】** 若抛物线 $y=x^2+mx+1$ 关于直线 $x=1$ 对称,则 $m=-2$;反之也成立.所以抛物线 $y=x^2+mx+1$ 关于直线 $x=1$ 对称的充要条件是 $m=-2$.

13. **解:**(1)$x-3=0\Rightarrow(x-2)(x-3)=0$,但 $(x-2)(x-3)=0\nRightarrow x-3=0$,故 p 是 q 的充分不必要条件.

(2)两个三角形相似$\nRightarrow$两个三角形全等,但两个三角形全等$\Rightarrow$两个三角形相似,故 p 是 q 的必要不充分条件.

(3)由 $ax^2+2x-1=0$ 有两个不相等的实数根,知 $\Delta=2^2-4\times a\times(-1)>0$ 且 $a\neq0$,得 $a>-1$ 且 $a\neq0$,即 $p\Rightarrow q$;反之,当 $a=0$ 时,方程 $ax^2+2x-1=0$ 只有一个实数根,即 $q\nRightarrow p$.故 p 是 q 的充分不必要条件.

(4)因为 $A\cup B=A\Leftrightarrow A\cap B=B$,所以 p 是 q 的充要条件.

14. **证明:**充分性:如果 $b=0$,那么 $y=kx$,当 $x=0$ 时,$y=0$,所以一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 的图象经过坐标原点.

必要性:因为一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 的图象经过坐标原点,所以当 $x=0$ 时,$y=0$,即 $k\times0+b=0$,所以 $b=0$.

综上,一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 的图象经过坐标原点的充要条件是 $b=0$.

15. $0<a<3$ **【解析】** 由"$y\in B$"是"$y\in A$"的必要条件,得 $A\subseteq B$.又 A 中元素为整数,故 A 只可能为 $\{1\},\{2\},\{1,2\}$.由点 $(x-1,x-a)$ 不在第一、三象限,得 $\begin{cases}x-1\geqslant0,\\x-a\leqslant0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-1\leqslant0,\\x-a\geqslant0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\geqslant1,\\x\leqslant a\end{cases}$ ①或 $\begin{cases}x\leqslant1,\\x\geqslant a\end{cases}$ ②.当 $a<1$ 时,①无解,由②得 $a\leqslant x\leqslant1$,此时 $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid a\leqslant x\leqslant1\}$,故 $A=\{1\}$,则 $0<a<1$;当 $a=1$ 时,$x=1$,则 $A=\{1\}$,满足题意;当 $a>1$ 时,②无解,由①得 $1\leqslant x\leqslant a$,此时 $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid1\leqslant x\leqslant a\}$,因为 $1\in A$,$3\notin A$,所以 $1<a<3$.综上,实数 a 的取值范围是 $0<a<3$.

16. **解:**"$a-b+c=0$"是"一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一根为 -1"的充要条件.理由如下:若 $a-b+c=0$,则 $b=a+c$,则 $ax^2+bx+c=ax^2+(a+c)x+c=(ax+c)(x+1)$,故 $x=-1$ 满足一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$,即一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一根为 -1,充分性成立;

若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一根为 -1,则 $a-b+c=0$,必要性成立.

综上所述,"$a-b+c=0$"是"一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一根为 -1"的充要条件.

1.5 全称量词与存在量词

1.5.1 全称量词与存在量词

1. B **【解析】** 对于 A,含有存在量词"有些",为存在量词命题;对于 B,含有全称量词"所有的",为全称量词命题;对于 C,含有存在量词"存在一个",为存在量词命题;对于 D,含有存在量词"有一条",为存在量词命题.故选 B.

2. C **【解析】** "$\forall$"表示"任意的",故选 C.

3. D **【解析】** 因为 $P=\{1,2,4,5,6\}$,$M=\{2,4,6\}$,所以 $M\subsetneqq P$,故"$\exists x\in P,x\notin M$"为真命题.故选 D.

4. D **【解析】** 对于选项 A,例如二次函数 $y=-x^2$,其图象开口向下,故 A 为假命题;对于选项 B,根据平行线的传递性可知 B 为假命题;对于选项 C,例如直角梯形的对角线不相等,故 C 为假命题;对于选项 D,正方形都是菱形,即有些菱形是正方形,故 D 为真命题.故选 D.

5. A **【解析】** 对于 A,该命题是全称量词命题,命题都能判断真假,A 是真命题,符合题意;对于 B,该命题是存在量词命题,不符合题意;对于 C,该命题是全称量词命题,当 $a=-2$,$b=-1$ 时,$a^2>b^2$,C 是假命题,不符合题意;对于 D,该命题是存在量词命题,不符合题意.故选 A.

6. B **【解析】** 存在 $x=0\in\mathbf{Q}$,使 $2x-x^3=0$,A 是真命题;当 $x\in\mathbf{R}$ 时,$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ 恒成立,因此不存在 $x\in\mathbf{R}$,使 $x^2+x+1=0$,B 是假命题;2 是素数,也是偶数,C 是真命题;0 是有理数,0 没有倒数,D 是真命题.故选 B.

7. A **【解析】** 命题"存在 $x\in\{x\mid0<x<3\}$,使得 $2x-m=0$ 成立"是假命题,即命题"存在 $x\in\{x\mid0<x<3\}$,使得 $x=\frac{m}{2}$ 成立"是假命题,所以 $\frac{m}{2}\leqslant0$ 或 $\frac{m}{2}\geqslant3$,解得 $m\leqslant0$ 或 $m\geqslant6$,则实数 m 的取值范围是 $m\leqslant0$ 或 $m\geqslant6$.故选 A.

8. AD **【解析】** 对于选项 A,有些自然数是 13 的约数,"有些"是存在量词,故 A 符合题意.对于选项 B,正方形是菱形可以写成所有正方形都是菱形,"所有"是全称量词,故 B 不符合题意.对于选项 C,能被 6 整除的数也能被 3 整除可以写成一切能被 6 整除的数也都能被 3 整除,"一切"是全称量词,故 C 不符合题意.对于选项 D,存在 $x\in\mathbf{R}$,使得 $|x|\leqslant0$,"存在"是存在量词,故 D 符合题意.故选 AD.

9. AB **【解析】** 由"$\exists x\in M,x>3$"为假命题,可得 $M\subseteq\{x\mid x\leqslant3\}$,由"$\forall x\in M,|x|>x$"为真命题,可得 $M\subseteq\{x\mid x<0\}$,所以 $M\subseteq\{x\mid x<0\}$.结合选项,可得 A,B 符合题意.故选 AB.

10. 存在量词命题 假 **【解析】** 该命题是存在量词命题.$x^2+2x+5=(x+1)^2+4\geqslant4$ 恒成立,故该命题为假命题.

11. $a>1$ **【解析】** 命题"$\exists x\in\mathbf{R},x^2+2x+a=0$"为假命题,则关于 x 的方程 $x^2+2x+a=0$ 没有实数根,得 $\Delta=4-4a<0$,解得 $a>1$,所以实数 a 的取值范围是 $a>1$.

12. 对任意 $b>a>0$,$m>n>0$,都有 $\frac{a+m}{b+m}>\frac{a+n}{b+n}$

【解析】 $\because$ 真分数 $\frac{a}{b}(b>a>0)$ 满足 $\frac{a+1}{b+1}>\frac{a}{b}$,$\frac{a+2}{b+2}>\frac{a+1}{b+1}$,$\frac{a+3}{b+3}>\frac{a+2}{b+2}$,…,$\therefore$ 写出的一个全称量词命题为"对任意 $b>a>0$,$m>n>0$,都有 $\frac{a+m}{b+m}>\frac{a+n}{b+n}$".

13. **解:**(1)全称量词命题.取 $x=0$,则 $x^2+1=1<2$,所以该命题为假命题.

(2)存在量词命题.梯形不是平行四边形,所以该命题为真命题.

(3)全称量词命题.与 x 轴平行的直线与 x 轴无交点,所以该命题为假命题.

(4)全称量词命题.对于 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$,当 $a<0$ 时,函数有最大值无最小值,所以该命题为假命题.

(5)存在量词命题.因为判别式 $\Delta=9-4\times(-4)=25>0$,所以方程 $x^2-3x-4=0$ 有实根,该命题为真命题.

(6)存在量词命题.取 $x=3,y=0$,则 $2x+4y=6$,故该命题为真命题.

14. 解:若 $x>0$,则由 $|x|>ax$ 得 $a<\frac{x}{x}=1$;

若 $x<0$,则由 $|x|>ax$ 得 $a>-\frac{x}{x}=-1$.

故实数 a 的取值范围是 $-1<a<1$.

15. B **【解析】**∵命题"$\exists x\in\mathbf{R},4x^2+(a-2)x+\frac{1}{4}=0$"是假命题,∴关于 x 的方程 $4x^2+(a-2)x+\frac{1}{4}=0$ 没有实数根,∴$\Delta=(a-2)^2-4\times4\times\frac{1}{4}=a^2-4a=a(a-4)<0$,∴$0<a<4$.结合选项知,集合 $\{a|0<a<4\}$ 是集合 $\{a|0\leqslant a\leqslant4\}$ 的真子集,故选 B.

16. 解:(1)不等式 $m+y>0$ 可化为 $m>-y$,而 $-y=-x^2+2x-5=-(x-1)^2-4\leqslant-4$,要使 $m>-y$ 对于任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,则 $m>-4$,故实数 m 的取值范围是 $m>-4$.

(2)不等式 $m-y>0$ 可化为 $m>y$,若存在实数 x 使不等式 $m>y$ 成立,则 $m>y_{最小值}$,又由 $y=(x-1)^2+4$,得 $y_{最小值}=4$,所以 $m>4$,故实数 m 的取值范围是 $m>4$.

1.5.2 全称量词命题和存在量词命题的否定

1. C **【解析】**因为命题 p:$\forall x\in\mathbf{N},x^3>x^2$,所以命题 p 的否定为"$\exists x\in\mathbf{N},x^3\leqslant x^2$".故选 C.

2. D **【解析】**命题"存在 $x\in\mathbf{Q}$,使得 $x+\sqrt{11}$ 是无理数"的否定是"对任意 $x\in\mathbf{Q}$,都有 $x+\sqrt{11}$ 不是无理数".故选 D.

3. B **【解析】**由全称量词命题的否定为存在量词命题,知命题"任意圆的内接四边形是矩形"的否定为"有的圆的内接四边形不是矩形".故选 B.

4. C **【解析】**命题 p:任一实数的平方都不小于 0,是全称量词命题,故命题 p 的否定为存在量词命题,即 $\exists x\in\mathbf{R},x^2<0$,故选 C.

5. C **【解析】**对于①,命题"所有的四边形都是矩形"是全称量词命题,故①错误;对于②,命题"$\forall x\in\mathbf{R},x^2+1<0$"是全称量词命题,故②正确;对于③,命题"$\exists x\in\mathbf{R},x^2+2x+1\leqslant0$"的否定为"$\forall x\in\mathbf{R},x^2+2x+1>0$",故③错误;对于④,由 $ac^2>bc^2$ 可以推出 $a>b$,所以命题"$a>b$ 是 $ac^2>bc^2$ 的必要条件"是真命题,故④正确.故选 C.

6. A **【解析】**由题知"$\exists x\in\mathbf{R},x^2-4x+a=0$"为真命题,则关于 x 的方程 $x^2-4x+a=0$ 有实数根,即 $\Delta=16-4a\geqslant0$,解得 $a\leqslant4$.故选 A.

7. A **【解析】**因为命题"$\exists m\in\mathbf{R},A\cap B\neq\varnothing$"为假命题,所以命题"$\forall m\in\mathbf{R},A\cap B=\varnothing$"为真命题".因为集合 $A=\{x|0\leqslant x\leqslant a\}$,集合 $B=\{x|m^2+3\leqslant x\leqslant m^2+4\}$,所以当 $A=\{x|0\leqslant x\leqslant a\}=\varnothing$ 时,$a<0$,此时 $A\cap B=\varnothing$,符合题意;当 $A=\{x|0\leqslant x\leqslant a\}\neq\varnothing$ 时,可得 $\begin{cases}a\geqslant0,\\a<m^2+3,\end{cases}$ 解得 $0\leqslant a<3$.综上,实数 a 的取值范围为 $a<3$,故选 A.

8. ABD **【解析】**对于选项 A,因为 $x^2-x+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant0$,所以选项 A 为真命题,所以命题的否定为假命题,故 A 符合题意;对于选项 B,因为所有的正方形都是矩形,所以选项 B 为真命题,所以命题的否定为假命题,故 B 符合题意;对于选项 C,因为 $x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0$,所以选项 C 为假命题,所以命题的否定为真命题,故 C 不符合题意;对于选项 D,因为当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时,$x^2-2=0$,所以选项 D 为真命题,所以命题的否定为假命题,故 D 符合题意.故选 ABD.

9. BCD **【解析】**选项 A,由 $\sqrt{x}=\sqrt{2x+1}$,得 $\begin{cases}x=2x+1,\\x\geqslant0,\\2x+1\geqslant0,\end{cases}$ 方程组无解,即不存在 $x\in\mathbf{R}$,使 $\sqrt{x}=\sqrt{2x+1}$,p 是假命题,则 p 的否定为真命题,故 A 错误;选项 B,当 $x=\frac{1}{2}$ 时,$x^2=\frac{1}{4}$,$x^3=\frac{1}{8}$,此时 $x^2>x^3$,即 $\exists x\in(0,+\infty)$,使 $x^2\geqslant x^3$,所以命题 q 是假命题,则 q 的否定为真命题,故 B 正确;命题 p 是存在量词命题,命题 q 是全称量词命题,故 C,D 正确.故选 BCD.

10. $\forall x\in\mathbf{R},x^2-x+1=0$　$\exists x\in\mathbf{R},x^2-x+1\neq0$

【解析】命题"对于所有的实数 x,都有 $x^2-x+1=0$"可用符号记为"$\forall x\in\mathbf{R},x^2-x+1=0$",该命题的否定为"$\exists x\in\mathbf{R},x^2-x+1\neq0$".

11. 真　$\forall x\in\mathbf{Q},x^2-x+1\notin\mathbf{Z}$ **【解析】**当 $x=1$ 时,$x^2-x+1=1-1+1=1\in\mathbf{Z}$,所以"$\exists x\in\mathbf{Q},x^2-x+1\in\mathbf{Z}$"为真命题,其否定为 $\forall x\in\mathbf{Q},x^2-x+1\notin\mathbf{Z}$.

12. $a<-1$ **【解析】**由题知,命题"$\forall x\in\mathbf{R},x^2-2x-a\neq0$"为真命题,则关于 x 的方程 $x^2-2x-a=0$ 没有实数根,所以 $\Delta=4+4a<0$,解得 $a<-1$.

13. 解:(1)该命题的否定:任意四边形的对角线都不互相垂直.菱形为四边形,所有菱形的对角线互相垂直,故所得命题为假命题.

(2)该命题的否定:每一个平行四边形都不是菱形.是假命题.

(3)"所有二次函数的图象都开口向上"是全称量词命题,其否定为"有些二次函数的图象不开口向上",是真命题.

(4)"存在 $x\in\mathbf{Q}$,使得 $x^2=6$"是存在量词命题,其否定为"对任意 $x\in\mathbf{Q}$,都有 $x^2\neq6$",是真命题.

(5)该命题的否定:存在实数 m,使得方程 $x^2+2x-m=0$ 没有实数根.是真命题.

(6)该命题的否定:$\forall x\in\mathbf{R},x^2+2x+5\leqslant0$.是假命题.

14. 解:因为 p 的否定是假命题,所以 p 是真命题,由"$\forall x\in\{x|1\leqslant x\leqslant2\},a\geqslant x+1$"为真命题,得 $a\geqslant3$.因为 q 是真命题,所以关于 x 的方程 $2x^2+5x+a=0$ 有实数根,

则 $\Delta=25-8a\geqslant0$,解得 $a\leqslant\frac{25}{8}$.

综上,实数 a 的取值范围是 $3\leqslant a\leqslant\frac{25}{8}$.

15. BD **【解析】**对于 A,命题的否定为"$\exists x\in\mathbf{R},x^2\leqslant x$",∵$0\in\mathbf{R},0^2=0$,∴命题的否定是真命题,∴A 错误;对于 B,命题的否定为"$\forall m\in\mathbf{N},\sqrt{m^2+1}\notin\mathbf{N}$",∵当 $m=0$ 时,

$\sqrt{m^2+1}=1\in \mathbf{N}$，∴命题的否定是假命题，∴B正确；对于C，∵命题“线段的垂直平分线上的点到这条线段两个端点的距离相等”是真命题，∴命题的否定是假命题，∴C错误；对于D，命题的否定为“对任意整数 n，n^2+n 都为偶数”，∵当 n 为整数时，$n^2+n=n(n+1)$ 是偶数，∴命题的否定是真命题，∴D正确．故选BD．

16. **解**：两位同学出的题中 m 的取值范围是一致的．
理由如下：∵“$\exists x\in \mathbf{R}$，$x^2+2x+m\leqslant 0$”的否定是“$\forall x\in \mathbf{R}$，$x^2+2x+m>0$”，而“$\exists x\in \mathbf{R}$，$x^2+2x+m\leqslant 0$”是假命题，则其否定“$\forall x\in \mathbf{R}$，$x^2+2x+m>0$”是真命题，
∴两位同学出的题中 m 的取值范围是一致的．

滚动习题（二）

1. B **【解析】**“所有的长方体都有12条棱”的否定是“有些长方体没有12条棱”．故选B．
2. C **【解析】**因为 $1<x<3$ 推不出 $0<x<1$，所以 $1<x<3$ 不是 p：$0<x<1$ 的充分条件，A错误；因为 $-1<x<1$ 推不出 $0<x<1$，所以 $-1<x<1$ 不是 p：$0<x<1$ 的充分条件，B错误；因为 $\frac{1}{3}<x<\frac{3}{4}$ 能推出 $0<x<1$，所以 $\frac{1}{3}<x<\frac{3}{4}$ 是 p：$0<x<1$ 的充分条件，C正确；因为 $\frac{1}{2}<x<5$ 推不出 $0<x<1$，所以 $\frac{1}{2}<x<5$ 不是 p：$0<x<1$ 的充分条件，D错误．故选C．
3. A **【解析】**因为存在量词命题的否定为全称量词命题，所以命题“$\exists x\in \mathbf{Z}$，$x^2=\sqrt{2}x-1$”的否定是“$\forall x\in \mathbf{Z}$，$x^2\neq \sqrt{2}x-1$”．故选A．
4. C **【解析】**$a=3\Leftrightarrow A=B$，故选C．
5. A **【解析】**若 $(x_1^3-x_2^3)x_1^2=(x_1-x_2)(x_1^2+x_2^2+x_1x_2)x_1^2<0$，则 $x_1\neq 0$，所以 $x_1^2+x_2^2+x_1x_2=\frac{3}{4}x_1^2+\left(x_2+\frac{x_1}{2}\right)^2\geqslant \frac{3}{4}x_1^2>0$，则 $x_1-x_2<0$，即 $x_1<x_2$，充分性成立；若 $x_1<x_2$，取 $x_1=0$，$x_2=1$，则 $(x_1^3-x_2^3)x_1^2=0$，必要性不成立．故选A．
6. D **【解析】**若 p 为真命题，则 $4-4a\geqslant 0$，解得 $a\leqslant 1$．结合选项知，p 为真命题的一个充分不必要条件是 $a<0$，故选D．
7. ABD **【解析】**对于A，当 $x=0\in \mathbf{N}$ 时，$\sqrt{x^2+1}=1\in \mathbf{N}$，故A为真命题；对于B，当 $A=\varnothing$ 时，$A\subseteq \varnothing$，故B为真命题；对于C，当 $x=1\in \mathbf{N}$ 时，$x^2-2x+1=0$，故C为假命题；对于D，因为 $x^2\geqslant 0$，所以 $3x^2+1\geqslant 1>0$，故D为真命题．故选ABD．
8. BC **【解析】**若关于 x 的方程 $x^2+(m-1)x+1=0$ 至多有一个实数根，则 $\Delta\leqslant 0$，即 $(m-1)^2-4\leqslant 0$，解得 $-1\leqslant m\leqslant 3$．根据必要条件的定义，结合选项可知，$-2<m<4$ 和 $m<4$ 是 $-1\leqslant m\leqslant 3$ 的必要条件，故选BC．
9. 0 **【解析】**若“$x=2$”是“$x^2-2x+c=0$”的充分条件，则 $x=2$ 是方程 $x^2-2x+c=0$ 的根，可得 $c=0$．
10. 对于任意一个实数对 (x,y)，都有 $2x+3y+3\geqslant 0$
【解析】命题“存在一个实数对 (x,y)，使 $2x+3y+3<0$ 成立”是存在量词命题，其否定是“对于任意一个实数对 (x,y)，都有 $2x+3y+3\geqslant 0$”．
11. $a<-2$ **【解析】**依题意得，$A=\{x\,|\,|x|<2\}=\{x\,|-2<x<2\}$．因为 $x\in A$ 是 $x\in B$ 的充分不必要条件，所以 $A\subsetneqq B$，则 $B\neq\varnothing$ 且 $-a>2$，解得 $a<-2$．
12. $m\geqslant 8$ **【解析】**由题意可知，对任意 $x\in\{x\,|-2<x<4\}$，$2x-m<0$ 恒成立，则 $\begin{cases}-4-m\leqslant 0,\\ 8-m\leqslant 0,\end{cases}$ 解得 $m\geqslant 8$，所以实数 m 的取值范围是 $m\geqslant 8$．
13. **解**：(1)因为“一切”是全称量词，所以该命题为全称量词命题．它的否定是“存在实数 a，b，使得 $|a-b|>|a|+|b|$ 成立”，为假命题．
(2)因为“至少存在一对”是存在量词，所以该命题为存在量词命题．它的否定是“对任意整数 x，y，都有 $8x-3y\neq 11$”，为假命题．
(3)因为“有些”是存在量词，所以该命题为存在量词命题．它的否定是“所有正方形的对角线都互相垂直”，为真命题．
14. **解**：(1)因为 p 的否定是真命题，所以 p 是假命题，即关于 x 的方程 $x^2-2ax+a^2+a-2=0$ 无实数根，
所以 $\Delta=4a^2-4(a^2+a-2)<0$，解得 $a>2$，所以实数 a 的取值范围是 $a>2$．
(2)由(1)知，p：$a\leqslant 2$，若 p 是 q 的必要不充分条件，则 $\{a\,|\,m-1\leqslant a\leqslant m+3\}\subsetneqq\{a\,|\,a\leqslant 2\}$，所以 $m+3\leqslant 2$，解得 $m\leqslant -1$，所以实数 m 的取值范围是 $m\leqslant -1$．
15. **证明**：充分性：∵$ac<0$，∴$a\neq 0$，∴方程 $ax^2+bx+c=0$ 为一元二次方程，且 $\Delta=b^2-4ac\geqslant -4ac>0$，
∴$ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实数根，设为 x_1，x_2．
∵$ac<0$，∴$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}<0$，∴$x_1$，$x_2$ 一正一负，即 $ax^2+bx+c=0$ 有一个正根和一个负根．
必要性：∵$ax^2+bx+c=0$ 有一个正根和一个负根，
∴$a\neq 0$，∴方程 $ax^2+bx+c=0$ 为一元二次方程．设两个根为 x_1，x_2，则 $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}<0$，∴$ac<0$．综上知，“$ac<0$”是“关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个正根和一个负根”的充要条件．

第二章　一元二次函数、方程和不等式

2.1　等式性质与不等式性质

第1课时　不等关系与不等式

1. D **【解析】**由题意可知另一段绳子的长度为 $(5-x)$ m，因为两段绳子的长度之差不小于1 m，所以 $\begin{cases}|x-(5-x)|\geqslant 1,\\ 0<x<5,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}|2x-5|\geqslant 1,\\ 0<x<5.\end{cases}$ 故选D．
2. B **【解析】**$M-N=2a(a+1)-(a+1)(a+3)=(a+1)(a-3)$，∵$a\geqslant 3$，∴$a+1>0$，$a-3\geqslant 0$，∴$(a+1)(a-3)\geqslant 0$，∴$M\geqslant N$．故选B．
3. C **【解析】**$x^3-y-(x^2y-x)=x^3-x^2y+x-y=x^2(x-y)+(x-y)=(x^2+1)(x-y)$．若 $x>y$，则 $(x^2+1)(x-y)>0$，即 $x^3-y>x^2y-x$；若 $x^3-y>x^2y-x$，即 $(x^2+1)(x-y)>0$，则 $x>y$．所以“$x>y$”是“$x^3-y>x^2y-x$”的

充要条件. 故选 C.

4. D 【解析】由题意,汽车所用时间加上摩托车所用时间小于1 小时,即$\frac{35}{60}+\frac{5}{x}<1$,故选 D.

5. A 【解析】图①是由两个等腰直角三角形构成的,面积 $S_1=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2$. 图②是一个矩形,面积 $S_2=ab$. 因为 $a\neq b$,所以由图可知$\frac{1}{2}(a^2+b^2)>ab$. 故选 A.

6. C 【解析】由题意知,$m_1=\frac{2\times 20}{\frac{20}{a}+\frac{20}{b}}=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{2ab}{a+b}$,$m_2=\frac{6a+6b}{12}=\frac{a+b}{2}$,显然 $m_1>0$,$m_2>0$,$\frac{m_1}{m_2}=\frac{\frac{2ab}{a+b}}{\frac{a+b}{2}}=\frac{4ab}{(a+b)^2}=\frac{4ab}{a^2+2ab+b^2}$,由题意知 $a\neq b$,所以 $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2>0$,所以 $a^2+b^2>2ab$,所以$\frac{m_1}{m_2}<1$,所以 $m_1<m_2$,故选 C.

7. C 【解析】设原来手机的屏幕面积为 b,整机面积为 a,则"屏占比"为$\frac{b}{a}(a>b)$,设手机的屏幕面积和整机面积同时增加的相同数量为 $m(m>0)$,则升级后手机的"屏占比"为$\frac{b+m}{a+m}$. $\because \frac{b+m}{a+m}-\frac{b}{a}=\frac{ab+am-ab-bm}{a(a+m)}=\frac{(a-b)m}{a(a+m)}>0$,$\therefore$该手机的"屏占比"和升级前比变大. 故选 C.

8. BCD 【解析】对于 A,$|x|$与 a 的和是非负数,应表示为"$|x|+a\geqslant 0$",所以 A 错误;对于 B,记三边分别为 a,b,c,则可表示为"$a+b>c$,$b+c>a$ 且 $a+c>b$",所以 B 正确;对于 C,2023 年 11 月某天的最低温度为 2 ℃,最高温度为 13 ℃,则这天的温度范围可表示为"2 ℃$\leqslant t\leqslant$13 ℃",所以 C 正确;对于 D,请木工需支付 $400x$ 元,请瓦工需支付 $500y$ 元,可得共需支付工资$(400x+500y)$元,又工人工资预算不超过20 000 元,故 $400x+500y\leqslant 20\ 000$,$x,y\in\mathbf{N}^*$,所以 D 正确. 故选 BCD.

9. ACD 【解析】对于 A,$\because a^2+3-2a=(a-1)^2+2>0$,$\therefore a^2+3>2a$,A 恒成立;对于 B,$\because x^2+y^2-xy=\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2\geqslant 0$,$\therefore x^2+y^2\geqslant xy$,B 不恒成立;对于 C,$\because a^2+b^2-2(a-b-1)=(a-1)^2+(b+1)^2\geqslant 0$,$\therefore a^2+b^2\geqslant 2(a-b-1)$,C 恒成立;对于 D,$\because a^2+b^2-2ab=(a-b)^2\geqslant 0$,$\therefore a^2+b^2\geqslant 2ab$,D 恒成立. 故选 ACD.

10. $<$ 【解析】$(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2=10+2\sqrt{21}$,$(2\sqrt{5})^2=20$,因为 $10+2\sqrt{21}-20=2\sqrt{21}-10=\sqrt{84}-\sqrt{100}<0$,所以 $(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2<(2\sqrt{5})^2$,所以$\sqrt{3}+\sqrt{7}<2\sqrt{5}$.

11. $\frac{b}{a}<\frac{b+m}{a+m}(a>b>0,m>0)$ 【解析】$\because a$ 克糖水中含糖量为 b 克,$\therefore$糖水的浓度为$\frac{b}{a}(a>b>0)$,若再加入 $m(m>0)$克糖,则糖水的浓度为$\frac{b+m}{a+m}$,糖水变甜了,说明浓度变大了,$\therefore \frac{b}{a}<\frac{b+m}{a+m}(a>b>0,m>0)$.

12. $ab>ab^2>a$ 【解析】因为 $a<0$,$-1<b<0$,所以 $ab>0$,$1-b>0$,$b-1<0$,$b+1>0$,所以 $ab-ab^2=ab(1-b)>0$,即 $ab>ab^2$,$ab^2-a=a(b^2-1)=a(b+1)(b-1)>0$,即 $ab^2>a$,所以 $ab>ab^2>a$.

13. **解:**设有 x 间宿舍,则学生人数为 $4x+19$,依题意得 $\begin{cases}4x+19<6x,\\4x+19>6(x-1),\end{cases}$解得$\frac{19}{2}<x<\frac{25}{2}$. $\because x\in\mathbf{N}^*$,$\therefore x=10$,11,12,则宿舍间数为 10 或 11 或 12,对应的学生人数分别为 59,63,67. 故宿舍间数和学生人数分别为 10 间 59 人,11 间 63 人或 12 间 67 人.

14. **解:**方法一(作差法):$\because \frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}-(\sqrt{a}+\sqrt{b})=$

$\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}-a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}=\frac{a(\sqrt{a}-\sqrt{b})+b(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}=$

$\frac{a(\sqrt{a}-\sqrt{b})-b(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}=\frac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}=$

$\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}\geqslant 0$,$\therefore \frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$,当且仅当 $a=b$ 时取等号.

方法二(作商法):$\frac{\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a})^3+(\sqrt{b})^3}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=$

$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a+b-\sqrt{ab})}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{a+b-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}=$

$\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}=1+\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}}\geqslant 1$.

$\because \sqrt{a}+\sqrt{b}>0$,$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}>0$,$\therefore \frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

方法三(平方后作差):$\because \left(\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2=\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+2\sqrt{ab}$,$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}$,$\therefore \left(\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=\frac{(a+b)(a-b)^2}{ab}$. $\because a>0,b>0$,$\therefore \frac{(a+b)(a-b)^2}{ab}\geqslant 0$,

又$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}>0$,$\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$,$\therefore \frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

15. ①16 ②1 【解析】设蔬菜水果类和肉食水产类店面的间数分别为 a,b. ①由题意知,$0.85\times 2400\geqslant 28a+20b\geqslant 0.8\times 2400$,化简得 $480\leqslant 7a+5b\leqslant 510$,又 $a+b=80$,$\therefore 480\leqslant 7a+5(80-a)\leqslant 510$,解得 $40\leqslant a\leqslant 55$,$\therefore a=40,41,\cdots,55$,$\therefore$两类店面间数的建造方案共有 16 种.

②由题意知$\frac{0.8b+ax}{80}\geqslant 0.9x$,$\therefore 0.8b+(80-b)x\geqslant 72x$,$\therefore x\leqslant\frac{0.8b}{b-8}=0.8\left(1+\frac{8}{b-8}\right)$,由①知 $b_{\max}=40$,$\therefore x\leqslant 0.8\times\left(1+\frac{8}{32}\right)=0.8\times\frac{5}{4}=1$,即 x 的最大值为 1.

16. **解:**由题意得,$C-A=\frac{1}{1+a}-(1+a^2)=\frac{-a(a^2+a+1)}{1+a}>0$,解得 $-1<a<0$;$C-B=\frac{1}{1+a}-(1-a)=\frac{a^2}{a+1}>0$,解得 $a>-1$ 且 $a\neq 0$;$C-D=\frac{1}{1+a}-\frac{1}{1-a}=\frac{-2a}{(1+a)(1-a)}>0$,

解得 $a>1$ 或 $-1<a<0$. 综上所述, $-1<a<0$. 当 $-1<a<0$ 时, C 最大, $D<1$, $A>1$, $B>1$, $A\neq B$, 故四个数互不相等, 故实数 a 的取值范围为 $-1<a<0$, A, B, C, D 中最小的数为 D.

第 2 课时　等式性质与不等式性质

1. A 【解析】当 $m\neq 0$ 时, 由 $ma=mb$ 得 $a=b$; 当 $m=0$ 时, $a=b$ 不一定成立. 故选 A.

2. D 【解析】对于 A, 当 $a=0$, $b=-1$ 时, 满足 $a>b$, 但是 $a^2<b^2$, 故 A 错误; 对于 B, 当 $a=1$, $b=-1$ 时, 满足 $a\neq b$, 但是 $a^2=b^2$, 故 B 错误; 对于 C, 当 $a=-2$, $b=-1$ 时, 满足 $a<|b|$, 但是 $a^2>b^2$, 故 C 错误; 对于 D, 若 $a>|b|$, 则 $|a|>|b|\geqslant 0$, 所以 $|a|^2>|b|^2$, 则 $a^2>b^2$, 故 D 正确. 故选 D.

3. C 【解析】若 $a<0$, $b>0$, 则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$, 故 A 错误; 若 $c=0$, 则 $ac^2=bc^2$, 故 B 错误; 因为 $a<0<b$, 所以 $ab-b^2=b(a-b)<0$, 即 $ab<b^2$, 故 C 正确; 因为 $c>a>b$, 所以 $0<c-a<c-b$, 所以 $\frac{1}{c-a}>\frac{1}{c-b}>0$, 故 D 错误. 故选 C.

4. C 【解析】当 $a<2$ 且 $b<2$ 时, $a+b<4$; 但是由 $a+b<4$, 得不到 $a<2$ 且 $b<2$, 比如 $a=3$, $b=0$. 故 "$a<2$ 且 $b<2$" 是 "$a+b<4$" 的充分不必要条件, 故选 C.

5. D 【解析】令 $t=3a-b=x(a+b)+y(a-b)$, 则 $t=3a-b=(x+y)a+(x-y)b$, 所以 $\begin{cases}x+y=3,\\x-y=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=2,\end{cases}$ 所以 $t=3a-b=(a+b)+2(a-b)$. 因为 $-1\leqslant a-b\leqslant 2$, 所以 $-2\leqslant 2(a-b)\leqslant 4$, 又 $1\leqslant a+b\leqslant 4$, 所以 $-1\leqslant(a+b)+2(a-b)\leqslant 8$, 即 $-1\leqslant t\leqslant 8$, 所以 $t=3a-b$ 的取值范围是 $-1\leqslant t\leqslant 8$. 故选 D.

6. D 【解析】由图可得 $-1<a<-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}<b<0$, $\frac{1}{2}<c<1$, 所以 $\frac{1}{2}<-a<1$, $0<-b<\frac{1}{2}$, 则 $0<ab<\frac{1}{2}<c$, 故选项 A 错误; $0<abc<\frac{1}{2}$, 故选项 B 错误; 因为 $-\frac{1}{2}<b<0$, 所以 $-1<2b<0$, 又 $\frac{1}{2}<c<1$, 所以 $-\frac{1}{2}<c+2b<1$, 又 $-1<a<-\frac{1}{2}$, 所以 $c+2b>a$, 故选项 C 错误; 因为 $-1<a<-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}<c<1$, 且由图可知 $|a|<|c|$, 即 $-a<c$, 所以 $0<a+c<\frac{1}{2}$, 又 $-1<2b<0$, 所以 $a+c>2b$, 故选项 D 正确. 故选 D.

7. A 【解析】$\because a+b=c+d$, $a+d>b+c$, $\therefore 2a>2c$, 即 $a>c$, 因此 $b<d$. $\because a+c<b$, a, b, $c>0$, $\therefore a<b$. 综上可得 $c<a<b<d$, 故选 A.

8. ACD 【解析】对于 A, 由 $a>b$, $c>d$, 可得 $a+c>b+d$, 故 A 正确; 对于 B, 令 $a=2$, $b=1$, $c=-1$, $d=-2$, 满足 $a>b$, $c>d$, 但是 $ac=-2$, $bd=-2$, 则 $ac>bd$ 不成立, 故 B 错误; 对于 C, 由 $ac^2<bc^2$, 可得 $c^2>0$, 则不等式两边同时除以 c^2 可得 $a<b$, 故 C 正确; 对于 D, $\frac{b+c}{a+c}-\frac{b}{a}=\frac{a(b+c)-b(a+c)}{a(a+c)}=\frac{c(a-b)}{a(a+c)}$, 因为 $a>b>0$, $c>0$, 所以 $a-b>0$, $a+c>0$, 则 $\frac{c(a-b)}{a(a+c)}>0$, 则 $\frac{b+c}{a+c}>\frac{b}{a}$, 故 D 正确. 故选 ACD.

9. AC 【解析】对于 A, $0+1<x+y\leqslant 2+4$, 即 $1<x+y\leqslant 6$, 故 A 正确; 对于 B, 由题知 $-2\leqslant -y<0$, 则 $1-2\leqslant x-y<4+0$, 即 $-1\leqslant x-y<4$, 故 B 错误; 对于 C, $0\times 1<xy\leqslant 4\times 2$, 即 $0<xy\leqslant 8$, 故 C 正确; 对于 D, 由题知 $\frac{1}{y}\geqslant\frac{1}{2}$, 则 $\frac{x}{y}\geqslant 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, 故 D 错误. 故选 AC.

10. $a^2<a<\frac{1}{a}$ 【解析】由 $0<a<1$, 得 $\frac{1}{a}>1$, 且 $a^2<a\times 1=a$, 所以 $a^2<a<\frac{1}{a}$.

11. $(2,1,-3,-2)$(答案不唯一) 【解析】因为 $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}>0$, 所以 a 与 b, c 与 d 分别同号, 且 $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}>0$, 又 $ad<bc$, 即 $ad-bc<0$, 所以 $bd<0$, 所以 b 与 d 异号, 所以 $(2,1,-3,-2)$ 符合题意.

12. 7 【解析】由 $|2x+3y|\leqslant 10$, $|x-y|\leqslant 5$ 可得 $-10\leqslant 2x+3y\leqslant 10$, $-5\leqslant x-y\leqslant 5$, 因为 $x+2y=\frac{3}{5}(2x+3y)-\frac{1}{5}(x-y)$, $-6\leqslant\frac{3}{5}(2x+3y)\leqslant 6$, $-1\leqslant -\frac{1}{5}(x-y)\leqslant 1$, 所以 $-7\leqslant x+2y\leqslant 7$, 故 $|x+2y|\leqslant 7$, 则 $|x+2y|$ 的最大值为 7.

13. **解:** (1) 因为 $-6<a<8$, 所以 $-12<2a<16$, 又 $2<b<3$, 所以 $-10<2a+b<19$.
(2) 因为 $2<b<3$, 所以 $-3<-b<-2$, 又 $-6<a<8$, 所以 $-9<a-b<6$.
(3) 因为 $2<b<3$, 所以 $\frac{1}{3}<\frac{1}{b}<\frac{1}{2}$. 当 $0\leqslant a<8$ 时, $0\leqslant\frac{a}{b}<4$; 当 $-6<a<0$ 时, $0<-a<6$, 所以 $0<-\frac{a}{b}<3$, 所以 $-3<\frac{a}{b}<0$. 综上可得, $-3<\frac{a}{b}<4$.

14. **证明:** 因为 $c<d<0$, 所以 $-c>-d>0$, 又因为 $a>b>0$, 所以 $a-c>b-d>0$,
所以 $(a-c)^2>(b-d)^2>0$, 所以 $0<\frac{1}{(a-c)^2}<\frac{1}{(b-d)^2}$. 因为 $a>b$, $d>c$, 所以 $a+d>b+c$, 又 $|b|>|c|$, 即 $b>-c$, 所以 $b+c>0$, 所以 $0<b+c<a+d$.
故 $\frac{b+c}{(a-c)^2}<\frac{a+d}{(b-d)^2}$, 原不等式得证.

15. D 【解析】$\because a,b,c,d>0$, $S=\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{b+c+a}+\frac{c}{c+d+b}+\frac{d}{d+a+c}$, $\therefore S>\frac{a}{a+b+c+d}+\frac{b}{a+b+c+d}+\frac{c}{a+b+c+d}+\frac{d}{a+b+c+d}=1$, $S<\frac{a+c}{a+b+c+d}+\frac{b+d}{a+b+c+d}+\frac{c+a}{a+b+c+d}+\frac{b+d}{a+b+c+d}=2$, $\therefore 1<S<2$. 故选 D.

16. **解:** (1) 根据题意可得 $\begin{cases}a+b=330①,\\\frac{a}{b}\geqslant 10\%②,\end{cases}$ 由①得 $b=330-a$, 代入②得 $\frac{a}{330-a}\geqslant 10\%$, 解得 $a\geqslant 30$, 所以这所公寓的最小窗

户面积为 30 m^2.

(2)同时增加窗户面积和地板面积后,比值为$\frac{a+t}{b+t}$.

因为$\frac{a+t}{b+t}-\frac{a}{b}=\frac{ab+tb-ab-at}{b(b+t)}=\frac{t(b-a)}{b(b+t)}$,且 $b>0,t>0$, $b>a$,所以$\frac{a+t}{b+t}-\frac{a}{b}=\frac{t(b-a)}{b(b+t)}>0$,所以$\frac{a+t}{b+t}>\frac{a}{b}$,所以同时增加相同的窗户面积和地板面积后,这所公寓的采光效果变好了.

2.2 基本不等式

第 1 课时 利用基本不等式求最值

1. D **【解析】** 该不等式等号成立的条件为 $a^2=\frac{4}{a^2}$,即 $a=\pm\sqrt{2}$,故选 D.

2. C **【解析】** 因为 $x>0$,所以 $y=2x+\frac{2}{x}\geqslant 2\sqrt{2x\cdot\frac{2}{x}}=4$,当且仅当 $2x=\frac{2}{x}$,即 $x=1$ 时等号成立,故函数有最小值 4,无最大值. 故选 C.

3. A **【解析】** 因为 $x^2+y^2-2xy=(x-y)^2\geqslant 0$,所以 $x^2+y^2\geqslant 2xy$,所以 $xy\leqslant 1$,所以 xy 的最大值为 1,故 A 正确,B 错误;因为 $x^2+y^2+2xy=(x+y)^2\geqslant 0$,所以 $x^2+y^2\geqslant -2xy$,所以 $xy\geqslant -1$,所以 xy 的最小值为-1,故 C,D 错误. 故选 A.

4. C **【解析】** $\because a>1$,$\therefore a-1>0$,则 $a+\frac{1}{a-1}=(a-1)+\frac{1}{a-1}+1\geqslant 3$,当且仅当 $a-1=\frac{1}{a-1}$,即 $a=2$ 时取等号,故选 C.

5. C **【解析】** 由 $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2\geqslant 0$,可得 $a^2+b^2\geqslant 2ab$,故选项 A 错误;若 $a=-1,b=-2$,则 $a+b=-3$,$-2\sqrt{|ab|}=-2\sqrt{2}$,可得 $a+b<-2\sqrt{|ab|}$,故选项 B 错误;由 $a^2+b^2+2ab=(a+b)^2\geqslant 0$,可得 $a^2+b^2\geqslant -2ab$,故选项 C 正确;若 $a=1,b=2$,则 $a+b=3$,$2\sqrt{|ab|}=2\sqrt{2}$,可得 $a+b>2\sqrt{|ab|}$,故选项 D 错误. 故选 C.

6. C **【解析】** $\frac{4}{a}+\frac{1}{b}=\left(\frac{4}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)=4+\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}+1\geqslant 5+2\sqrt{\frac{4b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=9$,当且仅当$\frac{4b}{a}=\frac{a}{b}$,即 $a=2b$ 时,等号成立,所以$\frac{4}{a}+\frac{1}{b}$的最小值是 9. 故选 C.

7. A **【解析】** 因为 $0<a<\frac{1}{2}$,所以 $1-2a>0$,所以$\frac{1}{a}+\frac{1}{1-2a}=\left(\frac{2}{2a}+\frac{1}{1-2a}\right)[2a+(1-2a)]=2+\frac{2(1-2a)}{2a}+\frac{2a}{1-2a}+1\geqslant 3+2\sqrt{\frac{2(1-2a)}{2a}\cdot\frac{2a}{1-2a}}=3+2\sqrt{2}$,当且仅当$\frac{2(1-2a)}{2a}=\frac{2a}{1-2a}$,即 $a=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ 时取等号,所以$\frac{1}{a}+\frac{1}{1-2a}$的最小值为 $3+2\sqrt{2}$,故选 A.

8. BC **【解析】** 对于选项 A,当 $x<0$ 时,$-x>0$,$\therefore -x+\frac{1}{-2x}\geqslant 2\sqrt{(-x)\cdot\frac{1}{-2x}}=\sqrt{2}$,$\therefore x+\frac{1}{2x}\leqslant-\sqrt{2}$,当且仅当 $x=\frac{1}{2x}$,即 $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$时等号成立,$\therefore$A 不能用基本不等式直接求得最小值,故 A 错误;对于选项 B,$\because x^2+1>0$,$\frac{1}{x^2+1}>0$,$\therefore x^2+1+\frac{1}{x^2+1}\geqslant 2\sqrt{(x^2+1)\times\frac{1}{x^2+1}}=2$,当且仅当 $x^2+1=\frac{1}{x^2+1}$,即 $x=0$ 时等号成立,$\therefore$B 能用基本不等式直接求得最小值,故 B 正确;对于选项 C,$\because\sqrt{x}>0$,$\frac{1}{\sqrt{x}}>0$,$\therefore\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\geqslant 2\sqrt{\sqrt{x}\times\frac{1}{\sqrt{x}}}=2$,当且仅当$\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}$,即 $x=1$ 时等号成立,$\therefore$C 能用基本不等式直接求得最小值,故 C 正确;对于选项 D,$\sqrt{x(1-x)}\leqslant\frac{x+(1-x)}{2}=\frac{1}{2}$,当且仅当 $x=1-x$,即 $x=\frac{1}{2}$时等号成立,$\therefore$D 不能用基本不等式直接求得最小值,故 D 错误. 故选 BC.

9. BC **【解析】** 对于 A,当 $x>0$ 时,$x+\frac{3}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{3}{x}}=2\sqrt{3}$,当且仅当 $x=\sqrt{3}$时取等号,同理当 $x<0$ 时,$x+\frac{3}{x}\leqslant-2\sqrt{3}$,当且仅当 $x=-\sqrt{3}$时取等号,所以选项 A 错误. 对于 B,$\frac{x^4+1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}\geqslant 2\sqrt{x^2\cdot\frac{1}{x^2}}=2$,当且仅当 $x=\pm1$ 时取等号,所以选项 B 正确. 对于 C,因为$\frac{(x+y)^2}{2}-(x^2+y^2)=-\frac{1}{2}(x-y)^2\leqslant 0$,所以$\frac{(x+y)^2}{2}\leqslant x^2+y^2$,所以选项 C 正确. 对于 D,当 $x<0,y<0$ 时,$\frac{x}{y}>0$,$\frac{y}{x}>0$,所以$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geqslant 2$,当且仅当 $x=y$ 时等号成立,所以选项 D 错误. 故选 BC.

10. 6 **【解析】** 因为 $a>0,b>0$ 且 $ab=1$,所以 $9a+b\geqslant 2\sqrt{9ab}=6$,当且仅当 $9a=b=3$ 时,等号成立.

11. 1 **【解析】** 由题意 $0=4x^2+y^2-3xy-1\geqslant 4xy-3xy-1$,当且仅当 $2x=y=\pm\sqrt{2}$时取等号,故 $xy\leqslant 1$,所以 xy 的最大值为 1.

12. ①②④ **【解析】** 对于①,$a+b=2\geqslant 2\sqrt{ab}$,所以 $ab\leqslant 1$(当且仅当 $a=b=1$ 时等号成立),所以①恒成立;对于②,由①知 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=4-2ab\geqslant 2$,所以②恒成立;对于③,假设$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2}$恒成立,则 $a+b+2\sqrt{ab}\leqslant 2$ 恒成立,即 $\sqrt{ab}\leqslant 0$ 恒成立,所以 $ab=0$ 恒成立,与已知不符,所以③不成立;对于④,由①知$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{2}{ab}\geqslant 2$,所以④恒成立;对于⑤,假设 $a^3+b^3\geqslant 3$ 恒成立,则$(a+b)(a^2-ab+b^2)\geqslant 3$ 恒成立,所以 $a^2-ab+b^2\geqslant\frac{3}{2}$恒成立,即$(a+b)^2-3ab\geqslant\frac{3}{2}$恒成立,所以 $ab\leqslant\frac{5}{6}$恒成立,与已知不符,所以⑤不恒成立. 故填①②④.

13. **证明:**(1)因为 a,$\frac{1}{a}$均为正数,所以由基本不等式得 $a+\frac{1}{a}\geqslant 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=2$,当且仅当 $a=\frac{1}{a}$,即 $a=1$ 时等号成立,

所以原不等式得证.

(2)因为 a,b 为正数,所以 $\frac{b}{a}$,$\frac{a}{b}$ 也为正数,由基本不等式得 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$,当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$,即 $a=b$ 时等号成立,所以原不等式得证.

14. **解:**(1)因为 a,b 是正数,且 $a+b=1$,所以由基本不等式得 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$,当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时取等号,即 $1\geqslant 2\sqrt{ab}$,所以 $ab\leqslant\frac{1}{4}$. 因为 a,b 是正数,所以 $ab>0$,所以 ab 的取值范围为 $0<ab\leqslant\frac{1}{4}$.

(2)因为正数 a,b 满足 $a+b=1$,所以 $\frac{2}{a}+\frac{8}{b}=\left(\frac{2}{a}+\frac{8}{b}\right)(a+b)=10+\frac{2b}{a}+\frac{8a}{b}\geqslant 10+2\sqrt{\frac{2b}{a}\cdot\frac{8a}{b}}=18$,

当且仅当 $\frac{2b}{a}=\frac{8a}{b}$,即 $a=\frac{1}{3}$,$b=\frac{2}{3}$ 时取等号,

所以 $\frac{2}{a}+\frac{8}{b}$ 的最小值为 18.

15. ACD **[解析]** 对于 A,$\because 0<x<6$,$\therefore x(6-x)\leqslant\left(\frac{x+6-x}{2}\right)^2=9$,当且仅当 $x=6-x$,即 $x=3$ 时取等号,故 A 正确;对于 B,$\because x\in\mathbf{R}$,$\therefore x^2+3\geqslant 3>0$,$\therefore x^2+\frac{1}{x^2+3}=(x^2+3)+\frac{1}{x^2+3}-3\geqslant 2\sqrt{(x^2+3)\cdot\frac{1}{x^2+3}}-3=-1$,当且仅当 $x^2+3=\frac{1}{x^2+3}$,即 $x^2=-2$ 或 $x^2=-4$ 时取等号,显然 $x^2=-2$ 和 $x^2=-4$ 都不成立,故原式取不到最小值 -1,故 B 错误;对于 C,$\because x,y>0$,$\therefore 6=x+2y+xy\geqslant 2\sqrt{x\cdot 2y}+xy$,令 $t=\sqrt{xy}>0$,则 $6\geqslant 2\sqrt{2}t+t^2$,可得 $0<t=\sqrt{xy}\leqslant\sqrt{2}$,$\therefore xy\leqslant 2$,当且仅当 $x=2y$ 时取等号,故 C 正确;对于 D,$\because x,y>0$,$x+4y+4=xy$,$\therefore y=\frac{x+4}{x-4}>0$,$\therefore x-4>0$,$\therefore 2x+y=2x+\frac{x+4}{x-4}=2x+\frac{8}{x-4}+1=2(x-4)+\frac{8}{x-4}+9\geqslant 2\sqrt{2(x-4)\cdot\frac{8}{x-4}}+9=17$,当且仅当 $2(x-4)=\frac{8}{x-4}$,即 $x=6$ 时取等号,故 D 正确. 故选 ACD.

16. **解:**(1)由 $a>0$,$b>0$,$a+b=\frac{2}{\sqrt{ab}}$,得 $\frac{2}{a+b}=\sqrt{ab}\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$,于是 $(a+b)^3\geqslant 8$,解得 $a+b\geqslant 2$,当且仅当 $a=b$ 时取等号.

由 $\begin{cases}a=b,\\ a+b=\frac{2}{\sqrt{ab}},\end{cases}$ 解得 $a=b=1$,所以 $a+b$ 的最小值为 2,此时 $a=b=1$.

(2)假设存在实数 a,b,使得 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\sqrt{3}$ 成立,

则 $a+b=\sqrt{3}ab$,因为 $a>0$,$b>0$,$\sqrt{ab}=\frac{2}{a+b}$,

所以 $a+b=\sqrt{3}\cdot\left(\frac{2}{a+b}\right)^2$,整理得 $(a+b)^3=4\sqrt{3}$,

由(1)知,$(a+b)^3\geqslant 8$,而 $4\sqrt{3}<8$,

因此假设不成立,所以不存在实数 a,b,使得 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\sqrt{3}$ 成立.

第 2 课时　基本不等式的简单应用

1. C **[解析]** 因为 $a>b>0$,所以 $a>\frac{a+b}{2}$,$\sqrt{ab}>b$,又 $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$,所以 $a>\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>b$.

2. C **[解析]** 设矩形模型一条边的长为 x cm,相邻边的长为 y cm,则 $x>0$,$y>0$,由题意可得 $2(x+y)=8$,所以 $x+y=4$. 设矩形模型的面积为 S cm^2,则 $S=xy\leqslant\frac{(x+y)^2}{4}=\frac{4^2}{4}=4$,当且仅当 $x=y=2$ 时等号成立,故选 C.

3. D **[解析]** 因为 $0<a<1$,$0<b<1$,所以 $a^2<a$,$b^2<b$,所以 $a^2+b^2<a+b$,又 $a^2+b^2>2ab$,所以 $2ab<a^2+b^2<a+b$. 因为 $a+b>2\sqrt{ab}$,所以 $a+b$ 的值最大,故选 D.

4. D **[解析]** 不等式 $2x+m+\frac{2}{x-1}>0$ 可化为 $2(x-1)+\frac{2}{x-1}>-m-2$. $\because x>1$,$\therefore x-1>0$,$\therefore 2(x-1)+\frac{2}{x-1}\geqslant 2\sqrt{2(x-1)\cdot\frac{2}{x-1}}=4$,当且仅当 $2(x-1)=\frac{2}{x-1}$,即 $x=2$ 时取等号. $\because$ 不等式 $2x+m+\frac{2}{x-1}>0$ 对任意 $x\in\{x|x>1\}$ 恒成立,$\therefore -m-2<4$,解得 $m>-6$. 故选 D.

5. B **[解析]** 对于 A,因为 x,y 为非零实数,所以 $x^2+y^2\geqslant 2xy$(当且仅当 $x=y$ 时取等号),则 $x^2+y^2+2xy\geqslant 4xy$,即 $xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$,故 A 恒成立;对于 B,当 x,y 异号时,$\frac{x^2+y^2}{xy}<0$,故 B 不恒成立;对于 C,$\left|x+\frac{1}{x}\right|=|x|+\left|\frac{1}{x}\right|\geqslant 2\sqrt{|x|\cdot\left|\frac{1}{x}\right|}=2$,当且仅当 $|x|=\left|\frac{1}{x}\right|$,即 $x=\pm 1$ 时取等号,故 C 恒成立;对于 D,$x^2+y^2=|x|^2+|y|^2\geqslant 2|x|\cdot|y|=2|xy|$,当且仅当 $|x|=|y|$ 时取等号,故 D 恒成立. 故选 B.

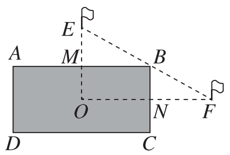
6. B **[解析]** 根据题意得 $100(1+a)(1+b)=100(1+x)^2$,则 $1+x=\sqrt{(1+a)(1+b)}$,又 $\sqrt{(1+a)(1+b)}\leqslant\frac{1+a+1+b}{2}=1+\frac{a+b}{2}$,当且仅当 $a=b$ 时取等号,所以 $x\leqslant\frac{a+b}{2}$. 故选 B.

7. A **[解析]** 因为 $a>0$,$b>0$,所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$,又 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$,所以 $1\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$,所以 $\frac{1}{ab}\leqslant\frac{1}{4}$,即 $ab\geqslant 4$,当且仅当 $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$,即 $a=b=2$ 时取等号,故 A 中结论错误;因为 $a>0$,$b>0$,$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$,所以 $a+b=(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=4$,当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$,即 $a=b=2$ 时取

等号,故 B 中结论正确;由 A 可知,$a^2+b^2\geqslant 2ab\geqslant 2\times 4=8$,当且仅当 $a=b=2$ 时取等号,故 C 中结论正确;因为 $a>0$,$b>0$,$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$,所以 $a+4b=(a+4b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=1+4+\left(\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}\right)\geqslant 5+2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{4b}{a}}=5+4=9$,当且仅当 $\frac{4b}{a}=\frac{a}{b}$,即 $a=3$,$b=\frac{3}{2}$ 时取等号,故 D 中结论正确. 故选 A.

8. ABC **[解析]** 对于 A,根据基本不等式可知 $a>0$ 时,$a^2+1\geqslant 2a>a$,当且仅当 $a=1$ 时等号成立,所以 $a^2+1>a$,故 A 恒成立;对于 B,当 $a>0$,$b>0$ 时,$a+\frac{1}{a}\geqslant 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=2$,当且仅当 $a=1$ 时等号成立,$b+\frac{1}{b}\geqslant 2\sqrt{b\cdot\frac{1}{b}}=2$,当且仅当 $b=1$ 时等号成立,所以 $\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\geqslant 4$,当且仅当 $a=b=1$ 时等号成立,故 B 恒成立;对于 C,$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=4$,当且仅当 $a=b$ 时等号成立,故 C 恒成立;对于 D,当 $a=3$ 时,$a^2+9=6a$,故 D 不恒成立. 故选 ABC.

9. CD **[解析]** 如图,设矩形 $ABCD$ 的中心为 O. 设 $MB=x$ 米,$BN=y$ 米,由题意知 $\triangle EMB\backsim\triangle BNF$,则 $\frac{EM}{MB}=\frac{BN}{NF}$,又 $EM=25$ 米,$NF=40$ 米,所以 $\frac{25}{x}=\frac{y}{40}$,化简得 $xy=1000$. 设矩形绿地的周长为 l 米,则 $l=2(2x+2y)\geqslant 2\times 2\sqrt{2x\cdot 2y}=8\times 10\sqrt{10}=80\sqrt{10}$,当且仅当 $x=y=10\sqrt{10}$ 时取等号. 结合选项知,该矩形绿地的周长可能为 $80\sqrt{10}$ 米,$90\sqrt{10}$ 米. 故选 CD.



10. 240 **[解析]** 设一年的总运费与总存储费用之和为 y 万元,则 $y=\frac{600}{x}\times 6+4x\geqslant 2\sqrt{\frac{3600}{x}\cdot 4x}=240$,当且仅当 $\frac{3600}{x}=4x$,即 $x=30$ 时取等号.

11. 9 **[解析]** 由 $4x+y=xy$,可得 $\frac{4}{y}+\frac{1}{x}=1$,又 $x>0$,$y>0$,所以 $x+y=(x+y)\left(\frac{4}{y}+\frac{1}{x}\right)=5+\left(\frac{4x}{y}+\frac{y}{x}\right)\geqslant 5+2\sqrt{\frac{4x}{y}\cdot\frac{y}{x}}=9$(当且仅当 $y=2x=6$ 时等号成立),即 $x+y$ 的最小值为 9. 若 $x+y-m\geqslant 0$ 恒成立,则 $m\leqslant 9$,故实数 m 的最大值是 9.

12. 5 **[解析]** 每台机器运转 x 年的年平均利润为 $\frac{y}{x}$ 万元,由题知 $\frac{y}{x}=18-\left(x+\frac{25}{x}\right)$,且 $x\in\mathbf{N}^*$,由基本不等式可得 $x+\frac{25}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{25}{x}}=10$,所以 $\frac{y}{x}\leqslant 18-10=8$,当且仅当 $x=5$ 时等号成立,所以当每台机器运转 5 年时,年平均利润最大.

13. **证明:**(1)由 $a>0$,$b>0$,得 $a+b>0$,

$\because a+b=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}$,

$\therefore ab=1$,$\therefore a+b\geqslant 2\sqrt{ab}=2$,当且仅当 $a=b=1$ 时取等号,

$\therefore a+b\geqslant 2$.

(2)$\because a>0$,$b>0$,$c>0$,$\therefore\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$(当且仅当 $a=b$ 时取等号),$\frac{b+c}{2}\geqslant\sqrt{bc}$(当且仅当 $b=c$ 时取等号),$\frac{c+a}{2}\geqslant\sqrt{ca}$(当且仅当 $a=c$ 时取等号),

$\therefore\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$(当且仅当 $a=b=c$ 时取等号),

即 $a+b+c\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$.

$\because a,b,c$ 不全相等,$\therefore$ 等号不成立,

$\therefore a+b+c>\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$.

14. **解:**(1)由题知 $4x+6y=36$,即 $2x+3y=18$,每间虎笼的面积为 $xy\ \mathrm{m}^2$,

所以 $xy=\frac{1}{6}\times 2x\times 3y\leqslant\frac{1}{6}\times\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{27}{2}$,当且仅当 $2x=3y=9$ 时等号成立,

所以当 x,y 的值分别为 $\frac{9}{2}$,3 时,每间虎笼的面积最大.

(2)由题知 $xy=24$,所用钢筋网的总长为 $(4x+6y)$ m,

所以 $4x+6y\geqslant 2\sqrt{4x\cdot 6y}=2\sqrt{24\times 24}=48$,当且仅当 $4x=6y$,

即 $2x=3y=12$ 时等号成立,

所以当 x,y 的值分别为 6,4 时,所用钢筋网的总长最小.

15. AC **[解析]** 设从 A 地到 B 地的距离为 S,$S>0$,根据题意可知 $T_1=\frac{\frac{S}{2}}{V_1}+\frac{\frac{S}{2}}{V_2}=S\cdot\frac{V_1+V_2}{2V_1V_2}$,$T_2=S\cdot\frac{1}{\sqrt{V_1V_2}}$,易知 T_3 满足 $\frac{T_3}{2}(V_1+V_2)=S$,则 $T_3=S\cdot\frac{2}{V_1+V_2}$. 由 $V_1>0$,$V_2>0$ 可得 $T_1=S\cdot\frac{V_1+V_2}{2V_1V_2}\geqslant S\cdot\frac{2\sqrt{V_1V_2}}{2V_1V_2}=S\cdot\frac{1}{\sqrt{V_1V_2}}=T_2$(当且仅当 $V_1=V_2$ 时取等号),$T_3=S\cdot\frac{2}{V_1+V_2}\leqslant S\cdot\frac{2}{2\sqrt{V_1V_2}}=S\cdot\frac{1}{\sqrt{V_1V_2}}=T_2$(当且仅当 $V_1=V_2$ 时取等号),可得 $T_1\geqslant T_2\geqslant T_3$,故 A 正确,B 错误;易知 $T_1T_3=S\cdot\frac{V_1+V_2}{2V_1V_2}\cdot S\cdot\frac{2}{V_1+V_2}=\frac{S^2}{V_1V_2}=\left(S\cdot\frac{1}{\sqrt{V_1V_2}}\right)^2=T_2^2$,故 C 正确;$\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_3}=\frac{2V_1V_2}{S(V_1+V_2)}+\frac{V_1+V_2}{2S}=\frac{4V_1V_2+(V_1+V_2)^2}{2S(V_1+V_2)}$,$\frac{1}{T_2}=\frac{\sqrt{V_1V_2}}{S}$,显然 $\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_3}\neq\frac{1}{T_2}$,故 D 错误. 故选 AC.

16. **解:**(1)因为每月土地占地费 y_1(单位:万元)与 $x+1$ 成反比,所以设 $y_1=\frac{k_1}{x+1}$.

因为每月库存货物费 y_2(单位:万元)与 $3x+1$ 成正比,所以设 $y_2=k_2(3x+1)$.

因为在距离车站 5 千米处建仓库时,y_1 与 y_2 分别为 8 万元

和 16 万元,所以 $\frac{k_1}{5+1}=8$,可得 $k_1=48$,$(3\times5+1)k_2=16$,可得 $k_2=1$,

所以 $y_1=\frac{48}{x+1}$,$y_2=3x+1$,

故 $\omega=y_1+y_2=\frac{48}{x+1}+3x+1(x>0)$.

(2) $\omega=\frac{48}{x+1}+3x+1=\frac{48}{x+1}+3(x+1)-2\geqslant 2\sqrt{\frac{48}{x+1}\times3(x+1)}-2=22$,当且仅当 $\frac{48}{x+1}=3(x+1)$,即 $x=3$ 时等号成立,

所以该公司把仓库建在距离车站 3 千米处,才能使两项费用之和最小,最小值为 22 万元.

2.3 二次函数与一元二次方程、不等式

第 1 课时 二次函数与一元二次方程、不等式

1. C 【解析】解 $(x-1)(x+3)=0$ 可得 $x=-3$ 或 $x=1$,所以,不等式 $(x-1)(x+3)>0$ 的解集为 $\{x|x>1$ 或 $x<-3\}$. 故选 C.

2. A 【解析】由题图易知不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $\{x|-2<x<1\}$. 故选 A .

3. B 【解析】对于 A,$3x^2-7x\leqslant10$,即 $(x+1)(3x-10)\leqslant0$,解得 $-1\leqslant x\leqslant\frac{10}{3}$,故 A 错误;对于 B,$-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2}\leqslant0$ 可化为 $(x-1)^2\geqslant0$,其解集为 **R**,故 B 正确;对于 C,$(x+2)(x-3)>0$,解得 $x<-2$ 或 $x>3$,故 C 错误;对于 D,$-2x^2+x<-3$ 可化为 $(x+1)(2x-3)>0$,解得 $x<-1$ 或 $x>\frac{3}{2}$,故 D 错误. 故选 B.

4. A 【解析】不等式 $(a-x)\left(x-\frac{1}{a}\right)>0$ 可化为 $(x-a)\left(x-\frac{1}{a}\right)<0$,因为 $0<a<1$,所以 $a<\frac{1}{a}$,故解集是 $\left\{x\middle|a<x<\frac{1}{a}\right\}$.

5. C 【解析】因为方程 $\frac{1}{2}x^2+\sqrt{b}x+c-\frac{1}{2}a=0$ 的解集只有一个元素,所以 $\Delta=(\sqrt{b})^2-4\times\frac{1}{2}\times\left(c-\frac{1}{2}a\right)=0$,即 $a+b=2c$①,又因为方程 $3cx+2b=2a$ 的根为 $x=0$,所以 $a=b$②,由①②可得 $a=b=c$,即△ABC 为等边三角形,故选 C.

6. A 【解析】由条件知 x_1,x_2 为方程 $x^2-2ax-8a^2=0$ 的两根,则 $x_1+x_2=2a$,$x_1x_2=-8a^2$. 由 $(x_2-x_1)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=(2a)^2-4\times(-8a^2)=36a^2=15^2$,可得 $a=\frac{5}{2}$. 故选 A.

7. B 【解析】设 $y=ax^2+2bx+c(a\neq0)$,则当 $x=-2$ 时,$y=4a-4b+c>0$,当 $x=1$ 时,$y=a+2b+c<0$,∴关于 x 的方程 $ax^2+2bx+c=0$ 有两个不同的实根,∴$\Delta=4b^2-4ac>0$,即 $b^2>ac$. 又当 $x=-4$ 时,$y=16a-8b+c<0$,∴抛物线开口向下,∴$a<0$. 故选 B.

8. ACD 【解析】不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\{x|-2<x<1\}$,故 $a<0$ 且 $\begin{cases}-2+1=-\frac{b}{a},\\-2\times1=\frac{c}{a},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}b=a,\\c=-2a,\end{cases}$ 对于选项 A,$a<0$,故 A 正确;对于选项 B,$c=-2a>0$,故 B 错误;对于选项 C,$a+b+c=a+a+(-2a)=0$,故 C 正确;对于选项 D,$a-b+2c=a-a+2(-2a)=-4a>0$,故 D 正确. 故选 ACD.

9. ABD 【解析】不等式 $ax^2+(2-4a)x-8>0$ 可化为 $(ax+2)(x-4)>0$,当 $a=0$ 时,不等式的解集为 $\{x|x>4\}$,故 A 正确;当 $a>0$ 时,不等式的解集为 $\left\{x\middle|x>4 \text{ 或 } x<-\frac{2}{a}\right\}$,故 B 正确;当 $a=-\frac{1}{2}$ 时,不等式为 $\frac{1}{2}x^2-4x+8<0$,又 $\Delta=(-4)^2-4\times\frac{1}{2}\times8=0$,所以不等式的解集为空集,故 C 错误;当 $a=-1$ 时,不等式为 $x^2-6x+8<0$,可得不等式的解集为 $\{x|2<x<4\}$,故 D 正确. 故选 ABD.

10. $\{x|x\geqslant7$ 或 $x\leqslant-4\}$ 【解析】$-x^2+3x+28\leqslant0\Rightarrow x^2-3x-28\geqslant0\Rightarrow(x+4)(x-7)\geqslant0\Rightarrow x\geqslant7$ 或 $x\leqslant-4$,所以一元二次不等式 $-x^2+3x+28\leqslant0$ 的解集为 $\{x|x\geqslant7$ 或 $x\leqslant-4\}$.

11. $\{k|-3<k<0\}$ 【解析】由题意得,二次函数 $y=x^2+kx+k^2+k-4$ 的图象开口向上,又一个零点大于 2,一个零点小于 2,所以 $2^2+2k+k^2+k-4<0$,整理得 $k^2+3k<0$,解得 $-3<k<0$. 所以实数 k 的取值范围为 $\{k|-3<k<0\}$.

12. $0\leqslant a<1$ 【解析】不等式 $x^2-ax<0$ 可化为 $x(x-a)<0$,当 $a>0$ 时,不等式的解集为 $\{x|0<x<a\}$,由不等式的解集是集合 $\{x|0<x<1\}$ 的真子集,可得 $0<a<1$;当 $a<0$ 时,不等式的解集为 $\{x|a<x<0\}$,不符合题意;当 $a=0$ 时,不等式的解集为 $\varnothing$,符合题意. 综上可得,a 的取值范围是 $0\leqslant a<1$.

13. **解:**(1)当 $k=3$ 时,不等式可化为 $3x^2+x-2<0$,

即 $(x+1)(3x-2)<0$,解得 $-1<x<\frac{2}{3}$,所以原不等式的解集为 $\left\{x\middle|-1<x<\frac{2}{3}\right\}$.

(2)不等式可化为 $(kx-2)(x+1)<0$,

因为 $k<0$,所以有 $\left(x-\frac{2}{k}\right)(x+1)>0$,

①当 $\frac{2}{k}=-1$,即 $k=-2$ 时,不等式为 $(x+1)^2>0$,解得 $x\neq-1$;

②当 $\frac{2}{k}>-1$,即 $k<-2$ 时,解得 $x<-1$ 或 $x>\frac{2}{k}$;

③当 $\frac{2}{k}<-1$,即 $-2<k<0$ 时,解得 $x<\frac{2}{k}$ 或 $x>-1$.

综上,当 $k<-2$ 时,不等式的解集为 $\left\{x\middle|x<-1 \text{ 或 } x>\frac{2}{k}\right\}$;当 $k=-2$ 时,不等式的解集为 $\{x|x\neq-1\}$;

当 $-2<k<0$ 时,不等式的解集为 $\left\{x\middle|x<\frac{2}{k} \text{ 或 } x>-1\right\}$.

14. **解:**(1)因为关于 x 的不等式 $ax^2-3x+6>4$ 的解集为 $\{x|x<1$ 或 $x>b\}$,所以 1 和 b 是关于 x 的方程 $ax^2-3x+2=0$

的两个实数根，

由根与系数的关系，得$\begin{cases}1+b=\dfrac{3}{a},\\ 1\cdot b=\dfrac{2}{a},\end{cases}$解得$\begin{cases}a=1,\\ b=2.\end{cases}$

(2)原不等式可化为$x^2-(c+2)x+2c<0$，即$(x-2)(x-c)<0$.

①当$c>2$时，不等式的解集为$\{x|2<x<c\}$；

②当$c<2$时，不等式的解集为$\{x|c<x<2\}$；

③当$c=2$时，不等式的解集为$\varnothing$.

15. BD 【解析】不等式$x^2+(a-2)x-2a<0\Leftrightarrow(x+a)(x-2)<0$，显然$a\neq-2$，当$a<-2$时，原不等式的解集为$\{x|2<x<-a\}$，由于解集中恰有两个整数，则$4<-a\leqslant5$，解得$-5\leqslant a<-4$；当$a>-2$时，原不等式的解集为$\{x|-a<x<2\}$，由于解集中恰有两个整数，则$-1\leqslant-a<0$，解得$0<a\leqslant1$，因此$a$的取值范围是$-5\leqslant a<-4$或$0<a\leqslant1$，显然选项A，C不可能，B，D可能. 故选BD.

16. **解**：$\Delta=4t^2-4=4(t^2-1)=4(t-1)(t+1)$，当$\Delta<0$，即$-1<t<1$时，不等式$x^2-2tx+1>0$的解集为$\mathbf{R}$；

当$\Delta=0$时，$t=1$或$t=-1$，当$t=1$时，不等式即为$x^2-2x+1=(x-1)^2>0$，可得$x\neq1$，当$t=-1$时，不等式即为$x^2+2x+1=(x+1)^2>0$，可得$x\neq-1$；

当$\Delta>0$，即$t<-1$或$t>1$时，方程$x^2-2tx+1=0$有两根$x_1=t-\sqrt{t^2-1}$或$x_2=t+\sqrt{t^2-1}$，此时不等式$x^2-2tx+1>0$的解为$x<t-\sqrt{t^2-1}$或$x>t+\sqrt{t^2-1}$.

综上所述，当$-1<t<1$时，不等式$x^2-2tx+1>0$的解集为$\mathbf{R}$；当$t=1$时，不等式$x^2-2tx+1>0$的解集为$\{x|x\neq1\}$；当$t=-1$时，不等式$x^2-2tx+1>0$的解集为$\{x|x\neq-1\}$；当$t<-1$或$t>1$时，不等式$x^2-2tx+1>0$的解集为$\{x|x<t-\sqrt{t^2-1}$或$x>t+\sqrt{t^2-1}\}$.

第2课时　一元二次不等式的简单应用

1. C 【解析】由不等式$\dfrac{x-1}{2x+1}\leqslant0$，可得$\begin{cases}(x-1)(2x+1)\leqslant0,\\ 2x+1\neq0,\end{cases}$解得$-\dfrac{1}{2}<x\leqslant1$. 故选C.

2. A 【解析】因为集合$A=\{x|(x-1)(x+2)<0\}=\{x|-2<x<1\}$，集合$B=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{x}{x-1}>0\right\}=\{x|x<0$或$x>1\}$，所以$A\cap B=\{x|-2<x<0\}$，故选A.

3. D 【解析】由$\dfrac{3x-4}{x-1}<2$，得$\dfrac{3x-4}{x-1}-2=\dfrac{x-2}{x-1}<0$，即$(x-1)(x-2)<0$，解得$1<x<2$，所以不等式的解集为$\{x|1<x<2\}$. 故选D.

4. B 【解析】根据题意，有$s=\dfrac{1}{20}v+\dfrac{1}{160}v^2>40$，移项整理，得$v^2+8v-40\times160>0$，又$v>0$，解得$v>-4+4\sqrt{401}\approx76.1$，所以这辆汽车刹车前的速度至少为77 km/h. 故选B.

5. C 【解析】由题意得，二次函数$y=x^2-ax+1$的图象开口向上. 当$\begin{cases}\Delta=a^2-4>0,\\ 1-a+1\geqslant0\end{cases}$或$\begin{cases}\Delta=a^2-4>0,\\ 4-2a+1\geqslant0\end{cases}$时，解得$a<-2$或$2<a\leqslant\dfrac{5}{2}$；当$\Delta\leqslant0$时，解得$-2\leqslant a\leqslant2$，此时满足当$1\leqslant x\leqslant2$时，$x^2-ax+1\geqslant0$有解. 综上所述，$a\leqslant\dfrac{5}{2}$. 故选C.

6. C 【解析】依题意，每天有$300-10x$套礼服被租出，该礼服租赁公司每天租赁礼服的收入为$(300-10x)\cdot(200+10x)=(-100x^2+1000x+60\ 000)$元. 因为要使该礼服租赁公司每天租赁礼服的收入超过6.24万元，所以$-100x^2+1000x+60\ 000>62\ 400$，即$x^2-10x+24<0$，解得$4<x<6$. 因为$1\leqslant x\leqslant20$且$x\in\mathbf{Z}$，所以$x=5$，即该礼服租赁公司每套礼服每天的租价应定为250元. 故选C.

7. C 【解析】$(m-x)\oplus(m+x)<4$，即$(m-x+1)(m+x)=m^2-x^2+m+x<4$，则存在$x\in\{x|1\leqslant x\leqslant2\}$，使得不等式$m^2+m<x^2-x+4$成立，等价于$m^2+m<(x^2-x+4)_{\max}$，$1\leqslant x\leqslant2$. 由$x^2-x+4=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{15}{4}$，可得当$x=2$时，$x^2-x+4$取得最大值6，所以$m^2+m<6$，解得$-3<m<2$. 故选C.

8. ACD 【解析】$x^2+bx+c\geqslant2x+b$可整理为$x^2+(b-2)x+c-b\geqslant0$，根据二次函数的性质有$\Delta=(b-2)^2-4(c-b)=b^2-4c+4\leqslant0$，故A正确；当$b=1$，$c=2$时，满足$\Delta\leqslant0$，即原不等式成立，故B错误；由$\Delta\leqslant0$，得$c\geqslant\dfrac{b^2}{4}+1$，所以$c\geqslant1$，故C正确；$b+c\geqslant\dfrac{b^2}{4}+b+1=\left(\dfrac{b}{2}+1\right)^2\geqslant0$，故D正确. 故选ACD.

9. ABC 【解析】由汽车以120 km/h的速度行驶时，每小时的油耗为11.5 L，得$\dfrac{1}{5}\left(120-k+\dfrac{4500}{120}\right)=11.5$，解得$k=100$，故每小时的油耗为$\dfrac{1}{5}\left(x-100+\dfrac{4500}{x}\right)$L. 由题意得$\dfrac{1}{5}\left(x-100+\dfrac{4500}{x}\right)\leqslant9$，解得$45\leqslant x\leqslant100$，又$60\leqslant x\leqslant120$，所以$60\leqslant x\leqslant100$，故选ABC.

10. $\{x|0\leqslant x<1\}$ 【解析】由已知得$\dfrac{x-2}{x-1}-2\geqslant0$，化简整理得$\dfrac{x}{x-1}\leqslant0$，所以$x(x-1)\leqslant0$且$x-1\neq0$，则不等式的解集为$\{x|0\leqslant x<1\}$.

11. $a\leqslant6$ 【解析】方法一：令$y=x^2+ax+15-a$，依题意，$y\geqslant0$在$x\in\{x|-4\leqslant x\leqslant0\}$时恒成立，由于二次函数的图象开口向上，若$-\dfrac{a}{2}\leqslant-4$，即$a\geqslant8$，当$-4\leqslant x\leqslant0$时，$y$随$x$的增大而增大，所以$y_{最小值}=16-4a+15-a\geqslant0$，解得$a\leqslant\dfrac{31}{5}$，不合题意；若$-\dfrac{a}{2}\geqslant0$，即$a\leqslant0$，当$-4\leqslant x\leqslant0$时，$y$随$x$的增大而减小，所以$y_{最小值}=15-a\geqslant0$，解得$a\leqslant15$，所以$a\leqslant0$；当$0<a<8$时，只需判别式$\Delta=a^2+4a-60\leqslant0$，解得$-10\leqslant a\leqslant6$，所以$0<a\leqslant6$. 综上所述，$a$的取值范围是$a\leqslant6$.

方法二：当$-4\leqslant x\leqslant0$时，关于x的不等式$x^2+ax+15-a\geqslant0$恒成立，即$a\leqslant\dfrac{-x^2-15}{x-1}$恒成立，所以$a\leqslant\left(\dfrac{-x^2-15}{x-1}\right)_{最小值}$，又$\dfrac{-x^2-15}{x-1}=\dfrac{-(x-1)^2-2(x-1)-16}{x-1}=$

$1-x+\frac{16}{1-x}-2\geqslant 2\sqrt{(1-x)\cdot\frac{16}{1-x}}-2=6$,当且仅当 $1-x=\frac{16}{1-x}$,即 $x=-3$ 时等号成立,所以 $a\leqslant 6$.

12. 3 【解析】要使生产该产品 2 小时获得的利润不低于 3000 元,则 $2\times 100\left(5x+1-\frac{3}{x}\right)\geqslant 3000$,整理得 $5x-14-\frac{3}{x}\geqslant 0$,又 $1\leqslant x\leqslant 10$,所以 $5x^2-14x-3\geqslant 0$,可得 $3\leqslant x\leqslant 10$,故 x 的最小值是 3.

13. **解:**(1)由 $\frac{2x-5}{x+4}<0$,可得 $(2x-5)(x+4)<0$,解得 $-4<x<\frac{5}{2}$,∴原不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\,-4<x<\frac{5}{2}\right\}$.

(2)∵ $\frac{x+1}{2x-3}\leqslant 1$,∴ $\frac{x+1}{2x-3}-1\leqslant 0$,∴ $\frac{-x+4}{2x-3}\leqslant 0$,

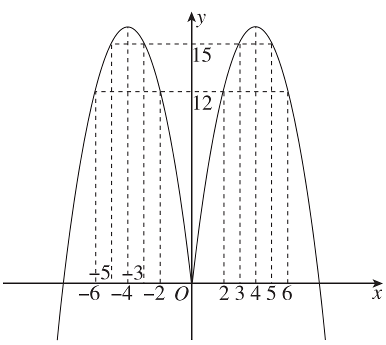
即 $\frac{x-4}{x-\frac{3}{2}}\geqslant 0$,此不等式等价于 $(x-4)\left(x-\frac{3}{2}\right)\geqslant 0$ 且 $x-\frac{3}{2}\neq 0$,解得 $x<\frac{3}{2}$ 或 $x\geqslant 4$,∴原不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\,x<\frac{3}{2}\text{或 }x\geqslant 4\right\}$.

14. **解:**(1)因为不等式 $y<0$ 的解集为 $\{x|1<x<t\}$,所以 1 和 t 为方程 $x^2-3x+b=0$ 的两根,所以 $\begin{cases}1\times t=b,\\1+t=3,\end{cases}$ 解得 $b=t=2$.

(2)由题意知当 $1\leqslant x\leqslant 4$ 时,$x^2-3x+2>kx^2$ 恒成立,两边同除以 x^2 得,$k<\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x}+1$. 令 $n=\frac{1}{x}$,则上述不等式等价于 $k<2n^2-3n+1$,$\frac{1}{4}\leqslant n\leqslant 1$,

所以有 $k<(2n^2-3n+1)_{\text{最小值}}$,令 $s=2n^2-3n+1=2\left(n-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$,$\frac{1}{4}\leqslant n\leqslant 1$,所以当 $n=\frac{3}{4}$ 时,$s_{\text{最小值}}=-\frac{1}{8}$,所以实数 k 的取值范围为 $k<-\frac{1}{8}$.

15. CD 【解析】由 $x^2-8|x|+a\leqslant 0$,得 $a\leqslant -x^2+8|x|$,令 $y=-x^2+8|x|=\begin{cases}-x^2+8x,x\geqslant 0,\\-x^2-8x,x<0,\end{cases}$ 作出该函数的图象如图所示. 由图可知,当 $12<a\leqslant 15$ 时,$a\leqslant -x^2+8|x|$ 恰有 6 个整数解,分别为 $-5,-4,-3,3,4,5$,又 $a\in\mathbf{Z}$,故 a 的可能取值为 13,14,15,故选 CD.



16. **解:**(1)设 $AB=x$ m,由题意得△NDC∽△NAM,

∴ $\frac{DC}{AM}=\frac{ND}{NA}$,即 $\frac{x}{60}=\frac{40-AD}{40}$,

则 $AD=\left(40-\frac{2}{3}x\right)$ m.

设矩形 $ABCD$ 的面积为 S m²,则 $S=40x-\frac{2}{3}x^2$ $(0<x<60)$. 要使幼儿园的占地面积不小于 576 m²,则 $40x-\frac{2}{3}x^2\geqslant 576$,化简得 $x^2-60x+864\leqslant 0$,解得 $24\leqslant x\leqslant 36$.

(2)$S=40x-\frac{2}{3}x^2=\frac{2}{3}x(60-x)\leqslant\frac{2}{3}\left(\frac{60-x+x}{2}\right)^2=600$,当且仅当 $x=60-x$,即 $x=30$ 时等号成立,

此时 $AD=40-\frac{2}{3}\times 30=20$ (m),故当 $AB=30$ m,$AD=20$ m 时,幼儿园的占地面积最大,最大面积是 600 m².

滚动习题(三)

1. C 【解析】由 $-x^2-x+2\geqslant 0$,得 $x^2+x-2\leqslant 0$,即 $(x+2)(x-1)\leqslant 0$,解得 $-2\leqslant x\leqslant 1$,∴解集为 $\{x|-2\leqslant x\leqslant 1\}$. 故选 C.

2. D 【解析】$m-n=x^2+y^2-2(x+y-1)=(x-1)^2+(y-1)^2\geqslant 0$,所以 $m\geqslant n$,当且仅当 $x=y=1$ 时取等号. 故选 D.

3. A 【解析】由 $\begin{cases}ac<0,\\c<a,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a>0,\\c<0.\end{cases}$ 又 $b>c$,∴ $ab>ac$,故 A 一定成立. ∵ $b-a<0$,$c<0$,∴ $c(b-a)>0$,故 B 不成立. 若 $b^2=0$,则可验证 C 不成立,而 $ac<0$,$a-c>0$,∴ $ac(a-c)<0$,故 D 不成立. 故选 A.

4. C 【解析】∵不等式 $mx^2+6mx+24>0$ 的解集为 $\{x|x<a$ 或 $x>a+2\}$,∴ a,$a+2$ 是关于 x 的方程 $mx^2+6mx+24=0$ 的两个根,且 $m>0$,∴ $a+(a+2)=-6$,且 $a(a+2)=\frac{24}{m}$,解得 $a=-4$,$m=3$. 故选 C.

5. D 【解析】设 $11x+3y=m(2x+3y)+n(5x-6y)$,则 $11x+3y=(2m+5n)x+(3m-6n)y$,所以 $\begin{cases}2m+5n=11,\\3m-6n=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=3,\\n=1,\end{cases}$ 于是 $11x+3y=3(2x+3y)+(5x-6y)$,又 $6\leqslant 3(2x+3y)\leqslant 18$,$-3\leqslant 5x-6y\leqslant 9$,所以 $3\leqslant 3(2x+3y)+(5x-6y)\leqslant 27$,即 $3\leqslant 11x+3y\leqslant 27$,故 $z=11x+3y$ 的取值范围是 $\{z|3\leqslant z\leqslant 27\}$. 故选 D.

6. C 【解析】$x+y=x+1+y+1-2=(x+1+y+1)\cdot\left(\frac{9}{x+1}+\frac{1}{y+1}\right)-2=8+\frac{9(y+1)}{x+1}+\frac{x+1}{y+1}\geqslant 8+2\sqrt{\frac{9(y+1)}{x+1}\cdot\frac{x+1}{y+1}}=14$,当且仅当 $\frac{9(y+1)}{x+1}=\frac{x+1}{y+1}$,即 $x=11$,$y=3$ 时等号成立,所以 $x+y$ 的最小值是 14. 故选 C.

7. ABD 【解析】由于不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\{x|-3<x<2\}$,所以 $x=-3$ 和 $x=2$ 是 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实数根,所以 $\begin{cases}-3+2=-\frac{b}{a},\\-3\times 2=\frac{c}{a},\\a<0,\end{cases}$ 故 $b=a$,$c=-6a$,则 $a+b+c=a+a-6a=-4a>0$,故 A,B 均正确;对于 C,不等式 $bx+c>0$ 即为 $ax-6a>0$,故 $x-6<0$,即 $x<6$,故 C 错误;对于 D,不等式 $cx^2+bx+a<0$ 即为 $-6ax^2+ax+a<0$,即

$6x^2-x-1<0$,解得$-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$,故D正确.故选ABD.

8. ABD 【解析】由不等式$(a+3m)x^2-(2b-3m)x-1<0$ $(a>0,b>0)$的解集为$\left\{x\left|-1<x<\frac{1}{2}\right.\right\}$,可得$a+3m>0$,且方程$(a+3m)x^2-(2b-3m)x-1=0$的两根为$-1$和$\frac{1}{2}$,

所以$\begin{cases}-1+\frac{1}{2}=\frac{2b-3m}{a+3m},\\-1\times\frac{1}{2}=\frac{-1}{a+3m},\end{cases}$解得$a+3m=2$,$2b-3m=-1$,所以$a+2b=1$,所以A正确;因为$a>0$,$b>0$,所以$1=a+2b\geqslant2\sqrt{2ab}$,可得$ab\leqslant\frac{1}{8}$,当且仅当$a=\frac{1}{2}$,$b=\frac{1}{4}$时取等号,所以$ab$的最大值为$\frac{1}{8}$,故B正确;$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)(a+2b)=5+\frac{2b}{a}+\frac{2a}{b}\geqslant5+2\sqrt{\frac{2b}{a}\cdot\frac{2a}{b}}=5+4=9$,当且仅当$\frac{2b}{a}=\frac{2a}{b}$时,即$a=b=\frac{1}{3}$时取等号,所以$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$的最小值为9,所以C错误;$2(a^2+4b^2)=a^2+(2b)^2+a^2+(2b)^2\geqslant a^2+(2b)^2+2a\cdot(2b)\geqslant(a+2b)^2=1$,则$a^2+4b^2\geqslant\frac{1}{2}$,当且仅当$a=\frac{1}{2}$,$b=\frac{1}{4}$时取等号,所以$a^2+4b^2$的最小值为$\frac{1}{2}$,所以D正确.故选ABD.

9. $\{x|-2\leqslant x<2\}$ 【解析】根据不等式$\frac{2x}{x-2}\leqslant1$整理可得$\frac{2x}{x-2}-1\leqslant0$,即$\frac{x+2}{x-2}\leqslant0$,等价于$\begin{cases}(x+2)(x-2)\leqslant0,\\x-2\neq0,\end{cases}$解得$-2\leqslant x<2$,所以不等式$\frac{2x}{x-2}\leqslant1$的解集为$\{x|-2\leqslant x<2\}$.

10. $-2<x<1$ 【解析】由题意得$x\odot(x-2)=x(x-2)+2x+(x-2)=x^2+x-2=(x+2)(x-1)$,又$x\odot(x-2)<0$,所以$(x+2)(x-1)<0$,解得$-2<x<1$.

11. $\{m|m\geqslant2\}$ 【解析】由$x^2+ax-a^2\geqslant x-am+1$,得$x^2+(a-1)x-a^2+am-1\geqslant0$.由题意可得存在$a>0$,使得$(a-1)^2+4(a^2-am+1)\leqslant0$成立,即存在$a>0$,使得$m\geqslant\frac{5a}{4}+\frac{5}{4a}-\frac{1}{2}$成立.又因为$\frac{5a}{4}+\frac{5}{4a}-\frac{1}{2}\geqslant2\sqrt{\frac{5a}{4}\cdot\frac{5}{4a}}-\frac{1}{2}=2$,当且仅当$a=1$时等号成立,故$m\geqslant2$.

12. $6\sqrt{3}-10$ 【解析】因为$x^2-3xy+2y^2=(x-y)(x-2y)=1$,所以设$x-y=t$,则$x-2y=\frac{1}{t}(t\neq0)$,所以$x=2t-\frac{1}{t}$,$y=t-\frac{1}{t}$,所以$2x^2+y^2=2\left(2t-\frac{1}{t}\right)^2+\left(t-\frac{1}{t}\right)^2=9t^2+\frac{3}{t^2}-10\geqslant6\sqrt{3}-10$,当且仅当$9t^2=\frac{3}{t^2}$,即$t^4=\frac{1}{3}$时等号成立,所以$2x^2+y^2$的最小值为$6\sqrt{3}-10$.

13. **解**:(1)选条件①,$M-N=(x+8)(x+11)-(x+9)(x+10)=(x^2+19x+88)-(x^2+19x+90)=-2<0$,

所以$M<N$.

选条件②,$\frac{1}{M}=\frac{1}{\sqrt{5}-2}=\sqrt{5}+2$,$\frac{1}{N}=\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\sqrt{6}+\sqrt{5}$,

由$0<\sqrt{5}+2<\sqrt{6}+\sqrt{5}$,得$0<\frac{1}{M}<\frac{1}{N}$,所以$M>N$.

(2)证明:$x^5y+xy^5-(x^4y^2+x^2y^4)=x^4y(x-y)+xy^4(y-x)=xy(x-y)(x^3-y^3)=xy(x-y)^2(x^2+xy+y^2)$,由$x>y>0$,得$xy(x-y)^2(x^2+xy+y^2)>0$,所以$x^5y+xy^5>x^4y^2+x^2y^4$.

14. **解**:(1)由抛物线$y=mx^2+(3-5m)x-n$经过点$(0,-15)$得$n=15$,

因为不等式$mx^2+(3-5m)x-n<0$的解集为$\left\{x\left|-\frac{m}{3}<x<\frac{n}{3}\right.\right\}$,所以$m>0$,易得关于$x$的一元二次方程$mx^2+(3-5m)x-n=0$的两个根为$-\frac{m}{3}$,$\frac{n}{3}$.

由根与系数的关系可得$\begin{cases}-\frac{m}{3}+\frac{n}{3}=\frac{5m-3}{m},\\-\frac{m}{3}\cdot\frac{n}{3}=-\frac{n}{m},\end{cases}$

解得$m=3$或$m=-3$(舍去),所以$m=3$,$n=15$.

(2)不等式$mx^2+(3-5m)x-15>0$可化为$(mx+3)(x-5)>0$.

令$-\frac{3}{m}=5$,得$m=-\frac{3}{5}$.

当$m=-\frac{3}{5}$时,不等式为$(x-5)^2<0$,无解;

当$m<-\frac{3}{5}$时,得$-\frac{3}{m}<5$,解不等式$(mx+3)(x-5)>0$得$-\frac{3}{m}<x<5$;

当$-\frac{3}{5}<m<0$时,$-\frac{3}{m}>5$,解不等式$(mx+3)(x-5)>0$得$5<x<-\frac{3}{m}$.

综上,当$m<-\frac{3}{5}$时,原不等式的解集为$\left\{x\left|-\frac{3}{m}<x<5\right.\right\}$;当$m=-\frac{3}{5}$时,原不等式的解集为$\varnothing$;

当$-\frac{3}{5}<m<0$时,原不等式的解集为$\left\{x\left|5<x<-\frac{3}{m}\right.\right\}$.

15. **解**:(1)由条件知$ab=12$,所以$b=\frac{12}{a}$,因为$b\geqslant3$,$a\geqslant3$,所以$b=\frac{12}{a}\geqslant3$,得$a\leqslant4$,所以$3\leqslant a\leqslant4$,

所以$S(a)=(36-2a)(24-b)=(36-2a)\left(24-\frac{12}{a}\right)=-48\left(\frac{9}{a}+a\right)+888$,

所以$S(a)=-48\left(\frac{9}{a}+a\right)+888(3\leqslant a\leqslant4)$.

(2)由(1)知,$S(a)=-48\left(\frac{9}{a}+a\right)+888\leqslant-48\times2\sqrt{\frac{9}{a}\times a}+888=600$,当且仅当$\frac{9}{a}=a$,即$a=3$时取等号,即$a=3$,$b=4$时,$S(a)$的最大值为600.所以当人行道的宽度$a=3$,$b=4$时才能使草坪的面积最大,且草坪的最大面积为600平方米.

第三章　函数的概念与性质

3.1　函数的概念及其表示

3.1.1　函数的概念

第 1 课时　函数的概念（一）

1. A 【解析】易知①④正确，②错误；根据函数的定义知，对于不同的 x，y 可以相同，例如 $f(x)=1$，故③错误. 故选 A.

2. A 【解析】由 $f(a)=2$，得 $\frac{1}{a-4}=2$，解得 $a=\frac{9}{2}$. 故选 A.

3. D 【解析】由 $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x-2}$，得 $\begin{cases}x-1\geqslant 0,\\x-2\neq 0,\end{cases}$ 解得 $x\geqslant 1$ 且 $x\neq 2$，所以函数 $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x-2}$ 的定义域为 $\{x\mid x\geqslant 1$ 且 $x\neq 2\}$. 故选 D.

4. B 【解析】①②中函数的定义域均为 $\mathbf{R}$，③中函数的定义域为 $\{x\mid x\geqslant 0\}$，④中函数的定义域为 $\{x\mid x\neq 0\}$，故选 B.

5. C 【解析】A 选项，当 $x=-2$ 时，$y=-4$，而 $-4\notin N$，故 A 错误；B 选项，当 $x=4$ 时，$y=4+3=7$，而 $7\notin N$，故 B 错误；C 选项，当 $x=\pm 2$ 时，$y=4\in N$，当 $x=1$ 时，$y=2\in N$，当 $x=4$ 时，$y=8\in N$，故 $y=2|x|$ 满足要求，C 正确；D 选项，当 $x=1$ 时，$y=1^2-2=-1$，而 $-1\notin N$，D 错误. 故选 C.

6. C 【解析】∵函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 6\}$，∴由 $0\leqslant 3x\leqslant 6$，得 $0\leqslant x\leqslant 2$，则 $y=f(3x)$ 的定义域为 $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$. 又 $x-2\neq 0$，即 $x\neq 2$，∴ $g(x)=\frac{f(3x)}{x-2}$ 的定义域是 $\{x\mid 0\leqslant x<2\}$. 故选 C.

7. A 【解析】由题意知 $f(3)=f(1)+f(2)=3f(1)=-3$. 故选 A.

8. ACD 【解析】根据函数的定义可知，定义域为 $\mathbf{N}^*$，值域为 $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$f(4)=5$，故选 ACD.

9. AC 【解析】选项 A，集合 A 中任何一个数在集合 B 中都有唯一一个数与之对应，故是函数；选项 B，集合 A 中存在数 3 在集合 B 中没有对应的，故不是函数；选项 C，集合 A 中任何一个数在集合 B 中都有唯一一个与之对应，故是函数；选项 D，集合 A 中存在数 5 在集合 B 中有 2 个数与之对应，故不是函数. 故选 AC.

10. 2 【解析】由题意知，在 $f(x)=\sqrt{x}$ 中，$f(16)=\sqrt{16}=4$，∴ $f[f(16)]=f(4)=\sqrt{4}=2$.

11. $\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 7\}$ 【解析】由题意得 $7+6x-x^2\geqslant 0$，即 $x^2-6x-7\leqslant 0$，解得 $-1\leqslant x\leqslant 7$，故函数的定义域为 $\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 7\}$.

12. $y=250+50x$，$x\in\{x\in\mathbf{N}^*\mid x\leqslant 10\}$ 【解析】根据题意，该同学计划第一天记忆 300 个单词，第一天后的每一天，在复习前面记忆过的单词的基础上增加 50 个新单词的记忆量，则 $y=300+(x-1)\times 50=250+50x$，$x\in\{x\in\mathbf{N}^*\mid x\leqslant 10\}$.

13. 解：(1)由 $\begin{cases}x\geqslant 0,\\x-1\neq 0,\end{cases}$ 得 $x\geqslant 0$ 且 $x\neq 1$，所以函数的定义域为 $\{x\mid x\geqslant 0$ 且 $x\neq 1\}$.

(2)因为 $f(x)=\frac{1}{x-1}+\sqrt{x}$，所以 $f(2)=\frac{1}{2-1}+\sqrt{2}=1+\sqrt{2}$，$f(6)=\frac{1}{6-1}+\sqrt{6}=\frac{1}{5}+\sqrt{6}$.

(3)方法一：由(1)知，$f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x\geqslant 0$ 且 $x\neq 1\}$，∴ $x+1\geqslant 0$ 且 $x+1\neq 1$，解得 $x\geqslant -1$ 且 $x\neq 0$，故函数 $f(x+1)$ 的定义域为 $\{x\mid x\geqslant -1$ 且 $x\neq 0\}$.

方法二：由题知，$f(x+1)=\frac{1}{x}+\sqrt{x+1}$，故 $\begin{cases}x+1\geqslant 0,\\x\neq 0,\end{cases}$ 解得 $x\geqslant -1$ 且 $x\neq 0$，

故函数 $f(x+1)$ 的定义域为 $\{x\mid x\geqslant -1$ 且 $x\neq 0\}$.

14. 解：某地“桃花节”观赏人数逐年增加，设 2022 年的观赏人数为 10 万人次，观赏人数的年平均增长率为 $x(0<x<1)$，预计 2024 年的观赏人数为 y 万人次，那么 $y=10(1+x)^2$，$0<x<1$.

15. 1 【解析】因为对任意的 $x\in\{x\mid x>1\}$ 恒有 $f(2x)=2f(x)$ 成立，所以 $f(3)=2f\left(\frac{3}{2}\right)$. 因为当 $x\in\{x\mid 1<x\leqslant 2\}$ 时，$f(x)=2-x$，所以 $f\left(\frac{3}{2}\right)=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$，所以 $f(3)=2f\left(\frac{3}{2}\right)=1$.

16. 解：(1)因为 $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}=1-\frac{1}{x^2+1}$，所以 $f(2)=1-\frac{1}{4+1}=\frac{4}{5}$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{\frac{1}{4}+1}=\frac{1}{5}$，$f(3)=1-\frac{1}{9+1}=\frac{9}{10}$，$f\left(\frac{1}{3}\right)=1-\frac{1}{\frac{1}{9}+1}=\frac{1}{10}$.

(2)由(1)中求得的结果发现 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=1$.

证明如下：$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{1}{x^2+1}=1$.

(3)由(2)知 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=1$，所以 $f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，$f(3)+f\left(\frac{1}{3}\right)=1$，$f(4)+f\left(\frac{1}{4}\right)=1$，…，$f(2024)+f\left(\frac{1}{2024}\right)=1$，所以 $f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f(3)+f\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots+f(2024)+f\left(\frac{1}{2024}\right)=2023$.

第 2 课时　函数的概念（二）

1. C 【解析】$x<-2$ 可以表示为 $x\in(-\infty,-2)$，$x\geqslant 0$ 可以表示为 $x\in[0,+\infty)$. 故选 C.

2. D 【解析】由 $\begin{cases}9-x^2\geqslant 0,\\x-1\neq 0,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 3,\\x\neq 1,\end{cases}$ 故 $-3\leqslant x\leqslant 3$ 且 $x\neq 1$，则函数 $f(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{x-1}$ 的定义域是 $[-3,1)\cup(1,3]$，故选 D.

3. C 【解析】对于 A 选项，$f(x)=\sqrt{x^2}=|x|$，$g(x)=\sqrt[3]{x^3}=x$，故不是同一个函数，A 错误；对于 B 选项，$f(x)=1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$g(x)=x^0$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，

故不是同一个函数,B 错误;对于 C 选项,$g(x)=|x-2|=\begin{cases}x-2,x\geqslant 2,\\-x+2,x<2,\end{cases}$且 $f(x)$,$g(x)$的定义域都为 $\mathbf{R}$,故是同一个函数,C 正确;对于 D 选项,$f(x)=x+3$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,$g(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$的定义域为$(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$,故不是同一个函数,D 错误. 故选 C.

4. A **[解析]** $f(x)=x^2-2x-2=(x-1)^2-3$,因为 $x\in[-2,2]$,所以 $x-1\in[-3,1]$,所以$(x-1)^2\in[0,9]$,所以$f(x)$的值域为$[-3,6]$,故选 A.

5. A **[解析]** $y=\dfrac{x-2}{x+1}=\dfrac{x+1-3}{x+1}=1-\dfrac{3}{x+1}$,因为 $x\in[0,2]$,所以 $x+1\in[1,3]$,所以$\dfrac{3}{x+1}\in[1,3]$,所以 $1-\dfrac{3}{x+1}\in[-2,0]$,所以函数 $y=\dfrac{x-2}{x+1}$,$x\in[0,2]$的值域为$[-2,0]$. 故选 A.

6. B **[解析]** 函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,即关于 x 的不等式 $mx^2+2mx+4>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$. 当 $m=0$ 时,得 $4>0$,显然不等式的解集为 $\mathbf{R}$;当 $m<0$ 时,二次函数 $y=mx^2+2mx+4$ 的图象开口向下,函数值 y 不可能恒大于 0,故不等式的解集不可能为 $\mathbf{R}$;当 $m>0$ 时,二次函数 $y=mx^2+2mx+4$ 的图象开口向上,要使不等式的解集为 $\mathbf{R}$,只需 $\Delta=4m^2-16m<0$,解得 $0<m<4$. 综上所述,实数 m 的取值范围为$[0,4)$. 故选 B.

7. A **[解析]** 由表可知 $f(1)=-2$,即 $m=-2$,函数的值域为$\{1,0,-2\}$,故选 A.

8. BC **[解析]** 当 $m=0$ 时,$f(x)=\sqrt{x^2-2x}$,由 $x^2-2x\geqslant 0$,解得 $x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 2$,则函数 $f(x)$的定义域 $P=(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$,故 A 错误;又函数 $y=x^2-2x$ 的图象的对称轴方程为$x=1$,且在$(-\infty,0]$上,y 随 x 的增大而减小,在$[2,+\infty)$上,y 随 x 的增大而增大,所以当 $x=0$ 或 2 时,$(x^2-2x)_{\min}=0$,则 $x^2-2x\geqslant 0$,即 $\sqrt{x^2-2x}\geqslant 0$,则函数 $f(x)$的值域 $Q=[0,+\infty)$,故 C 正确. 当 $m=2$ 时,$f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}$,因为 $x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0$,所以函数$f(x)$的定义域 $P=\mathbf{R}$,故 B 正确;又 $x^2-2x+2=(x-1)^2+1\geqslant 1$,所以 $\sqrt{x^2-2x+2}\geqslant 1$,则函数 $f(x)$的值域 $Q=[1,+\infty)$,故 D 错误. 故选 BC.

9. BC **[解析]** 由题意知函数 $y=x+1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,值域为 $\mathbf{R}$. $y=(\sqrt{x+1})^2$ 的定义域为$[-1,+\infty)$,与函数 $y=x+1$ 的定义域不同,不是同一个函数,故 A 错误;$y=\sqrt[3]{x^3}+1=x+1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,定义域和对应关系与 $y=x+1$ 均相同,是同一个函数,故 B 正确;$y=\sqrt[3]{(x+1)^3}=x+1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,定义域和对应关系与 $y=x+1$ 均相同,是同一个函数,故 C 正确;$y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$的定义域为$\{x\in\mathbf{R}\mid x\neq 1\}$,与函数 $y=x+1$ 的定义域不同,不是同一个函数,故 D 错误. 故选 BC.

10. $(-\infty,1)$ **[解析]** 由题意得 $4p-1<2p+1$,解得 $p<1$,即 p 的取值范围为$(-\infty,1)$.

11. $\dfrac{1}{x-5}-1$(答案不唯一) **[解析]** 因为 $f(x)=\dfrac{1}{x}$的定义域为$\{x\mid x\neq 0\}$,值域为$\{y\mid y\neq 0\}$,所以函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-5}-1$ 的定义域为$\{x\mid x\neq 5\}$,值域为$\{y\mid y\neq -1\}$.

12. $\sqrt{x}+2$(答案不唯一) **[解析]** $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,因为 $x^2+2\geqslant 2$,所以 $f(x)$的值域为$[2,+\infty)$. 若 $g(x)=\sqrt{x}+2$,则 $g(x)$的定义域为$[0,+\infty)$,因为$\sqrt{x}\geqslant 0$,所以$\sqrt{x}+2\geqslant 2$,所以 $g(x)$的值域为$[2,+\infty)$,所以 $f(x)$与 $g(x)$的值域相同,定义域不同,所以 $f(x)$和 $g(x)=\sqrt{x}+2$ 是"同象函数".

13. **解**:(1)令 $t=x^2-4x+6$,得 $t=(x-2)^2+2$,
故 $t\in[2,+\infty)$,所以函数的值域为$[\sqrt{2},+\infty)$.
(2)因为函数的定义域为$\{x\mid x\neq 1\}$,$y=\dfrac{5x+4}{x-1}=5+\dfrac{9}{x-1}$,
所以函数的值域为$\{y\mid y\neq 5\}$.
(3)要使 $\sqrt{x+1}$ 有意义,只需 $x+1\geqslant 0$,即 $x\geqslant -1$,故函数的定义域为$\{x\mid x\geqslant -1\}$. 设 $t=\sqrt{x+1}$,则 $x=t^2-1(t\geqslant 0)$,
设 $f(t)=t^2-1-t=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}$,
又 $t\geqslant 0$,所以 $f(t)\geqslant -\dfrac{5}{4}$,
所以原函数的值域为$\left[-\dfrac{5}{4},+\infty\right)$.

14. **解**:$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-x+\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}(x-1)^2+1$ 的图象的对称轴为直线 $x=1$,顶点坐标为$(1,1)$且图象开口向上. $\because m>1$,$\therefore$当 $x\in[1,m]$时,$f(x)$随 x 的增大而增大,要使 $f(x)$的定义域和值域都是$[1,m]$,则有$\begin{cases}f(1)=1,\\f(m)=m,\end{cases}$ $\therefore \dfrac{1}{2}m^2-m+\dfrac{3}{2}=m$,即 $m^2-4m+3=0$,解得 $m=3$ 或 $m=1$(舍去),
$\therefore$存在实数 $m=3$ 满足条件.

15. AB **[解析]** 由"$[a,b]$交汇函数"的定义可知"$[0,1]$交汇函数"的定义域与值域的交集为$[0,1]$. 对于选项 A,$y=\sqrt{1-x}$的定义域$A=(-\infty,1]$,值域 $B=[0,+\infty)$,则 $A\cap B=[0,1]$,A 正确;对于选项 B,$y=2\sqrt{x}-x$ 的定义域 $A=[0,+\infty)$,令 $t=\sqrt{x}\geqslant 0$,则 $y=2t-t^2=-(t-1)^2+1\leqslant 1$,故函数 $y=2\sqrt{x}-x$ 的值域 $B=(-\infty,1]$,则 $A\cap B=[0,1]$,B 正确;对于选项 C,$y=\dfrac{1}{x^2-2x+2}=\dfrac{1}{(x-1)^2+1}$,$\because(x-1)^2\geqslant 0$,$\therefore(x-1)^2+1\geqslant 1$,$\therefore 0<\dfrac{1}{(x-1)^2+1}\leqslant 1$,故函数 $y=\dfrac{1}{x^2-2x+2}$的定义域 $A=\mathbf{R}$,值域 $B=(0,1]$,则 $A\cap B=(0,1]$,C 错误;对于选项 D,$y=\sqrt{1-x^2}-|x|$的定义域 $A=[-1,1]$,$y^2=1-x^2+x^2-2|x|\sqrt{1-x^2}=1-2\sqrt{x^2(1-x^2)}$,$\because -1\leqslant x\leqslant 1$,$\therefore 0\leqslant x^2(1-x^2)\leqslant\dfrac{1}{4}$,则 $0\leqslant y^2\leqslant 1$,$\therefore -1\leqslant y\leqslant 1$,故 $y=\sqrt{1-x^2}-|x|$的值域 $B=[-1,1]$,则 $A\cap B=[-1,1]$,D 错误. 故选 AB.

16. **解**:(1)令 $3-2x=x$,得 $x=1$,故函数 $y=3-2x$ 的图象的稳定点为$(1,1)$.
(2)设点(x_0,x_0)是稳定点,则 $x_0=\dfrac{3x_0+18}{2x_0+a}$,即 $2x_0^2+(a-3)x_0-18=0$,由题意知该方程有两个根,且这两个根互为相

反数，故$(a-3)^2-4\times2\times(-18)>0$，$-\frac{a-3}{2}=0$，解得 $a=3$．由 $2x_0^2-18=0$，得 $x_0=\pm3$，

则稳定点为$(-3,-3)$，$(3,3)$．

(3)对任意实数 b，函数的图象恒有两个相异的稳定点，即关于 x 的方程 $ax^2+(b+1)x+(b-4)=x$ 恒有两个不相等的实数根，即关于 x 的方程 $ax^2+bx+(b-4)=0$ 恒有两个不相等的实数根，则 $\Delta_1=b^2-4a(b-4)>0$ 恒成立，

即关于 b 的方程 $b^2-4ab+16a>0$ 恒成立，所以 $\Delta_2=16a^2-4\times16a<0$，解得 $0<a<4$．

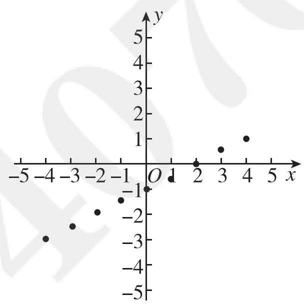
3.1.2　函数的表示法

第 1 课时　函数的表示法

1. B　**[解析]** 因为 $\pi^2\in\mathbf{R}$，所以 $f(\pi^2)=\pi$．
2. D　**[解析]** 由表可知 $f(2)=5$，$f(5)=7$，所以 $f[f(2)]=f(5)=7$，故选 D．
3. A　**[解析]** 方法一：令 $2x+1=3$，得 $x=1$，则 $f(3)=1-3+1=-1$．故选 A．

   方法二：设 $2x+1=t$，则 $x=\frac{t-1}{2}$，$f(t)=\left(\frac{t-1}{2}\right)^2-3\times\frac{t-1}{2}+1=\frac{1}{4}t^2-2t+\frac{11}{4}$，即 $f(x)=\frac{1}{4}x^2-2x+\frac{11}{4}$，

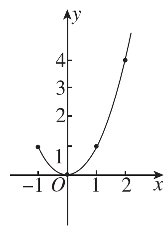
   $\therefore f(3)=\frac{9}{4}-6+\frac{11}{4}=-1$．
4. B　**[解析]** 将 $y=|x|$的图象向右平移 1 个单位长度，再向下平移 1 个单位长度，得到 $f(x)=|x-1|-1$ 的图象，故选 B．
5. B　**[解析]** 由题图可得 $f(3)=1$，$\therefore\frac{1}{f(3)}=1$，$\therefore f\left[\frac{1}{f(3)}\right]=f(1)=2$．故选 B．
6. C　**[解析]** ∵列车匀速前进，∴列车的行驶速度 $v=\frac{500}{5}=100(\mathrm{km/h})$，∴列车在出发$\frac{300}{100}=3(\mathrm{h})$后到达 C 地，此时距离 C 地 0 km，即函数图象经过点$(3,0)$，由此可排除 A，B，D，故选 C．
7. A　**[解析]** $f[f(x)]=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=\frac{1}{\frac{1-x-1}{1-x}}=\frac{x-1}{x}$($x\neq0$ 且 $x\neq1$)．
8. AD　**[解析]** 令 $t=\sqrt{x}-1\geqslant-1$，得$\sqrt{x}=t+1$，则 $x=(t+1)^2$，所以 $f(t)=2(t+1)^2+(t+1)-3=2t^2+5t$，故 $f(x)=2x^2+5x$，$x\in[-1,+\infty)$，则 $f(1)=7$，故 A 正确，B 错误．$f(x)=2x^2+5x=2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{8}$，所以 $f(x)_{\min}=f(-1)=-3$，$f(x)$的图象与 x 轴只有 1 个交点，故 C 错误，D 正确．故选 AD．
9. BC　**[解析]** 由已知图象可知面积 S 的增速经历三种变化，首先面积 S 的增速越来越大，之后面积 S 匀速增加，最后面积 S 的增速越来越小．对于 A 选项，由圆的性质可知，面积 S 的增速先越来越大，后越来越小，A 选项错误；对于 B 选项，首先面积 S 的增速越来越大，之后面积 S 匀速增加，最后面积 S 的增速越来越小，B 选项正确；对于 C 选项，首先面积 S 的增速越来越大，之后面积 S 匀速增加，最后面积 S 的增速越来越小，C 选项正确；对于 D 选项，首先面积 S 的增速越来越小，之后面积 S 匀速增加，最后面积 S 的增速越来越大，D 选项错误．故选 BC．
10. $[1,5]$　**[解析]** 由图象可知，函数 $f(x)$的值域为$[1,5]$．
11. -6　**[解析]** 函数 $f(x)=2x+3$，$g(x)=3x-k(k\in\mathbf{R})$，由 $f[g(x)]=g[f(x)]$恒成立，得 $2(3x-k)+3=3(2x+3)-k$ 恒成立，可得 $-2k+3=9-k$，解得 $k=-6$．
12. $f(x)=\frac{1}{3}x^2-4x+6$　**[解析]** 用 $3-x$ 代替原式中的 x，得 $f(3-x)+2f[3-(3-x)]=f(3-x)+2f(x)=(3-x)^2=x^2-6x+9$．由 $\begin{cases}f(x)+2f(3-x)=x^2,\\f(3-x)+2f(x)=x^2-6x+9,\end{cases}$ 消去 $f(3-x)$得 $-3f(x)=-x^2+12x-18$，$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^2-4x+6$．
13. **解：**(1)$y=\frac{1}{2}x-1$ 的定义域为$\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$，函数图象如图所示．



(2)$y=x^2$ 的定义域为$\{x\mid x\geqslant-1\}$，列表如下：

x	-1	0	1	2
y	1	0	1	4

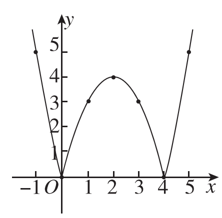
描点、连线，可得 $y=x^2$，$x\geqslant-1$ 的图象如图所示．



(3)$y=|x^2-4x|=\begin{cases}x^2-4x, x\geqslant4 \text{ 或 } x\leqslant0,\\4x-x^2, 0<x<4,\end{cases}$ 列表如下：

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	5	0	3	4	3	0	5

描点、连线，可得 $y=|x^2-4x|$的图象如图所示．



14. **解：**(1)由题意设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$，因为 $f(0)=1$，所以 $c=1$．又因为 $f(x+1)-f(x)=2x$，所以 $a(x+1)^2+b(x+1)+1-(ax^2+bx+1)=2x$，

    即 $2ax+a+b=2x$，所以 $\begin{cases}2a=2,\\a+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=-1,\end{cases}$ 所以

$f(x)=x^2-x+1$.

(2)方法一(换元法):令 $t=\sqrt{x}+2$,则 $x=(t-2)^2$,$t\geqslant 2$,
故 $f(t)=(t-2)^2+4(t-2)=t^2-4$,$t\geqslant 2$,
所以函数 $f(x)$的解析式为 $f(x)=x^2-4(x\geqslant 2)$.

方法二(配凑法):$f(\sqrt{x}+2)=x+4\sqrt{x}=x+4\sqrt{x}+4-4=(\sqrt{x}+2)^2-4$.因为$\sqrt{x}+2\geqslant 2$,所以函数 $f(x)$的解析式为 $f(x)=x^2-4(x\geqslant 2)$.

(3)因为 $f(x)+3f(-x)=2x^2-4x$,
所以 $f(-x)+3f(x)=2(-x)^2-4(-x)=2x^2+4x$,
两式联立消去 $f(-x)$可得 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+2x$.

(4)令 $y=x$,则 $f(x-x)=f(0)=f(x)-x(2x-x+1)=1$,所以 $f(x)=x^2+x+1$.

15. $-1\pm\sqrt{2}$ **【解析】** 由 $f_1(x)=\dfrac{1-x}{x+1}$,得 $f_2(x)=\dfrac{1-f_1(x)}{f_1(x)+1}=x$,∴ $f_3(x)=\dfrac{1-x}{x+1}$,$f_4(x)=x$,$f_5(x)=\dfrac{1-x}{x+1}$,$f_6(x)=x$,…,∴ $f_{28}(x)=x$.由 $f_3(x_0)=f_6(x_0)$得$\dfrac{1-x_0}{x_0+1}=x_0$,解得 $x_0=-1\pm\sqrt{2}$,∴ $f_{28}(x_0)=x_0=-1\pm\sqrt{2}$.

16. **解:**(1)因为 y 随 x 的增大先减小后增大,所以 y 与 x 满足二次函数关系.设 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$,由表中数据可知
$\begin{cases}a+b+c=5,\\4a+2b+c=2,\\36a+6b+c=10,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=1,\\b=-6,\\c=10,\end{cases}$
则 $y=x^2-6x+10(x>0)$.

(2)由(1)知 $y=x^2-6x+10=(x-3)^2+1$,所以当 $x=3$ 时,y 取得最小值 1,故纪念邮票市场价最低时的上市时间为第 3 天,最低价格为 1 元.

第 2 课时　分段函数

1. B **【解析】** 由题意知 $f(1)=1+2=3$,则 $f[f(1)]=f(3)=6-3=3$.故选 B.

2. D **【解析】** $y=\dfrac{|x|}{x}+x=\begin{cases}x+1,x>0,\\x-1,x<0,\end{cases}$结合一次函数的图象可知 A,B,C 错误,D 正确.故选 D.

3. D **【解析】** 因为 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x},x\geqslant 0,\\f(x+2),x<0,\end{cases}$ 所以 $f\left(-\dfrac{5}{2}\right)=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.故选 D.

4. C **【解析】** 令 $f(a)=t$,则 $f(t)=2$.因为当 $t\geqslant 0$ 时,$f(t)=-t^2\leqslant 0$,所以 $t^2+t=2(t<0)$,即 $t^2+t-2=0(t<0)$,可得 $t=-2$,所以 $f(a)=-2$.因为当 $a<0$ 时,$f(a)=a^2+a=\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}\geqslant-\dfrac{1}{4}$,所以 $a\geqslant 0$,则$-a^2=-2$,可得 $a=\sqrt{2}$.故选 C.

5. C **【解析】** 原不等式等价于 $\begin{cases}x\leqslant 1,\\-x+1\geqslant(x-1)^2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>1,\\x-1\geqslant(x-1)^2,\end{cases}$ 解得 $0\leqslant x\leqslant 2$,故选 C.

6. C **【解析】** 通过邮资标准表可得,当 $x=1200$ 时,$y=7.00$.故选 C.

7. A **【解析】** 由 $a*b=\begin{cases}b,a\geqslant b,\\a,a<b,\end{cases}$ 得 $g(x)=(-x^2-2x+4)*(-x+2)=\begin{cases}-x+2,x\in[-2,1],\\-x^2-2x+4,x\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty).\end{cases}$
当 $x\in[-2,1]$时,$g(x)=-x+2\in[1,4]$,当 $x\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$时,$g(x)=-(x+1)^2+5\in(-\infty,4)$,故 $g(x)$的值域为$(-\infty,4]$,故选 A.

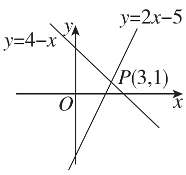
8. AC **【解析】** 因为 $f(1)=0$,$f(0)=3$,所以 $f[f(1)]=f(0)=3$,故 A 正确.因为 $f(0)=3$,$0<f(2)<3$,所以 $f(2)<f(0)$,故 B 错误.当 $x\in[0,1]$时,设 $f(x)=k_1x+b_1(k_1\neq 0)$,因为 $f(x)$的图象经过点$(1,0)$,$(0,3)$,所以 $\begin{cases}k_1+b_1=0,\\b_1=3,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}k_1=-3,\\b_1=3,\end{cases}$ 所以 $f(x)=3-3x$;当 $x\in[1,4]$时,设 $f(x)=k_2x+b_2(k_2\neq 0)$,因为 $f(x)$的图象经过点$(1,0)$,$(4,3)$,所以$\begin{cases}k_2+b_2=0,\\4k_2+b_2=3,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}k_2=1,\\b_2=-1,\end{cases}$ 所以 $f(x)=x-1$.故 $f(x)=-x+1+2|x-1|$,$x\in[0,4]$,故 C 正确.由上述分析得 $f(2)=2-1=1$,$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=3-\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$,所以不存在 $a>0$,使得不等式 $f(x)\leqslant a$ 的解集为$\left[\dfrac{1}{2},2\right]$,故 D 错误.故选 AC.

9. BC **【解析】** 对于 A,$f(0)=0^2=0$,A 错误.对于 B,当 $x\leqslant-1$ 时,$f(x)=x+2\leqslant-1+2=1$;当$-1<x<2$ 时,$f(x)=x^2\in[0,4)$.∴ $f(x)$的值域为$(-\infty,4)$,B 正确.对于 C,当 $x\leqslant-1$ 时,由 $f(x)=x+2<1$,得 $x<-1$;当$-1<x<2$ 时,由 $f(x)=x^2<1$,得$-1<x<1$.∴ $f(x)<1$ 的解集为$(-\infty,-1)\cup(-1,1)$,C 正确.对于 D,当 $x\leqslant-1$ 时,由 $f(x)=x+2=3$,解得 $x=1$(舍);当$-1<x<2$ 时,由 $f(x)=x^2=3$,解得 $x=-\sqrt{3}$(舍)或 $x=\sqrt{3}$.∴若 $f(x)=3$,则 $x=\sqrt{3}$,D 错误.故选 BC.

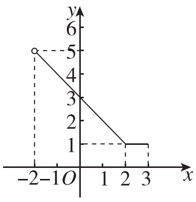
10. 1 **【解析】** ∵ 狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}0,x\notin\mathbf{Q},\\1,x\in\mathbf{Q},\end{cases}$
∴ $D[D(\sqrt{2})]=D(0)=1$.

11. 3 或-3 **【解析】** 当 $a<0$ 时,由 $f(a)=a^2+a=6$,解得 $a=2$(舍)或 $a=-3$;当 $a\geqslant 0$ 时,由 $f(a)=a+3=6$,解得 $a=3$.故实数 a 的值为 3 或-3.

12. 1 **【解析】** 由 $\begin{cases}y=2x-5,\\y=4-x,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3,\\y=1,\end{cases}$ 则函数 $y=2x-5$ 与 $y=4-x$ 的图象的交点为 $P(3,1)$,函数 $y=2x-5$ 和 $y=4-x$ 的图象如图所示.由图可知 $f(x)=\min\{2x-5,4-x\}=\begin{cases}2x-5,x\leqslant 3,\\4-x,x>3,\end{cases}$ 所以 $f(x)$的最大值为 1.



13. **解:**(1)当 $2\leqslant x\leqslant 3$ 时,$f(x)=2+\dfrac{x-2-x}{2}=1$;
当$-2<x<2$ 时,$f(x)=2+\dfrac{2-x-x}{2}=3-x$.
∴ $f(x)=\begin{cases}1,2\leqslant x\leqslant 3,\\3-x,-2<x<2.\end{cases}$
(2)函数 $f(x)$的图象如图所示.



(3) $f(x)$的值域为$[1,5)$.

14. **解**:(1)当 $a>0$ 时,由 $f(a)=a+2=\frac{25}{4}$, 得 $a=\frac{17}{4}$;

当 $a\leqslant 0$ 时,由 $f(a)=a^2=\frac{25}{4}$,解得 $a=\frac{5}{2}$(舍)或 $a=-\frac{5}{2}$.

所以 $a=\frac{17}{4}$或 $a=-\frac{5}{2}$.

(2)令 $f(k)=t$,则 $f(t)=\frac{9}{4}$. 当 $t>0$ 时,由 $f(t)=t+2=\frac{9}{4}$,得 $t=\frac{1}{4}$,所以 $f(k)=\frac{1}{4}$.

当 $k>0$ 时,由 $f(k)=k+2=\frac{1}{4}$,得 $k=-\frac{7}{4}$(舍);

当 $k\leqslant 0$ 时,由 $f(k)=k^2=\frac{1}{4}$,解得 $k=-\frac{1}{2}$或 $k=\frac{1}{2}$(舍).

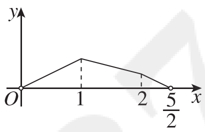
当 $t\leqslant 0$ 时,由 $f(t)=t^2=\frac{9}{4}$,解得 $t=\frac{3}{2}$(舍)或 $t=-\frac{3}{2}$.

当 $k>0$ 时,由 $f(k)=k+2=-\frac{3}{2}$,得 $k=-\frac{7}{2}$(舍);

当 $k\leqslant 0$ 时,$f(k)=k^2=-\frac{3}{2}$无实数解.

综上所述,$k=-\frac{1}{2}$.

15. A 【解析】当点 P 在 AB 上(不包括点 A,但包括点 B)时,$f(x)=\frac{1}{2}\cdot x\cdot 1=\frac{x}{2}$,$x\in(0,1]$;当点 P 在 BC 上(不包括点 B,但包括点 C)时,$f(x)=AB^2-\frac{1}{2}AD\cdot DM-\frac{1}{2}AB\cdot BP-\frac{1}{2}CP\cdot CM=1^2-\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times1\times(x-1)-\frac{1}{2}(2-x)\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$,$x\in(1,2]$;当点 P 在 CM 上(不包括点 C,M)时,$f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}-x\right)\times1=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$,$x\in\left(2,\frac{5}{2}\right)$. 所以 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2},x\in(0,1],\\-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4},x\in(1,2],\\-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4},x\in\left(2,\frac{5}{2}\right),\end{cases}$



画出函数 $f(x)$的图象,如图所示. 故选 A.

16. **解**:(1)当 $0\leqslant x\leqslant 180$ 时,$y=0.6x$;当 $180<x\leqslant 350$ 时,$y=180\times0.6+(x-180)\times0.65=0.65x-9$;

当 $x>350$ 时,$y=180\times0.6+(350-180)\times0.65+(x-350)\times0.9=0.9x-96.5$. 所以 y 关于 x 的函数关系式为

$$y=\begin{cases}0.6x,0\leqslant x\leqslant 180,\\0.65x-9,180<x\leqslant 350,\\0.9x-96.5,x>350.\end{cases}$$

(2)当 $x=350$ 时,$y=0.65\times350-9=218.5>199$,当 $x=180$ 时,$y=0.6\times180=108<199$,所以令 $0.65x-9=199$,解得 $x=320$,所以若该户居民该月交电费 199 元,则该户居民该月的用电量为 320 千瓦时.

3.2 函数的基本性质

3.2.1 单调性与最大(小)值

第 1 课时 函数的单调性

1. B 【解析】对于 A,$y=-x$ 在$[0,+\infty)$上单调递减,故 A 错误;对于 B,$y=x+1$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,所以也在$[0,+\infty)$上单调递增,故 B 正确;对于 C,$y=x^2-2x$ 在$(-\infty,1)$上单调递减,在$[1,+\infty)$上单调递增,故 C 错误;对于 D,$y=\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上单调递减,故 D 错误. 故选 B.

2. C 【解析】由图可知,$f(x)$的单调递减区间为$[-1,0)$,$[1,+\infty)$,故选 C.

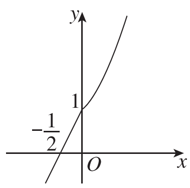
3. A 【解析】由$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}>0$ 知 $f(a)-f(b)$与 $a-b$ 同号,即当 $a<b$ 时,$f(a)<f(b)$,当 $a>b$ 时,$f(a)>f(b)$,所以 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是增函数. 故选 A.

4. D 【解析】因为函数 $f(x)=x^2-2mx+1$ 在$(-\infty,1)$上单调递减,$f(x)=x^2-2mx+1$ 的图象开口向上,对称轴为直线 $x=m$,所以 $m\geqslant 1$,即实数 m 的取值范围是$[1,+\infty)$,故选 D.

5. D 【解析】$f(x)=\frac{x+2}{x-1}=\frac{x-1+3}{x-1}=1+\frac{3}{x-1}(x\neq1)$,所以函数 $f(x)$的图象可由反比例函数 $y=\frac{3}{x}$的图象向右平移 1 个单位长度,再向上平移 1 个单位长度得到. 因为 $y=\frac{3}{x}$在$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$上单调递减,所以 $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$在$(-\infty,1)$和$(1,+\infty)$上单调递减. 故选 D.

6. C 【解析】方法一:当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$单调递增,且 $f(0)=1$;当 $x<0$ 时,$f(x)=2x+1$ 单调递增,且 $f(x)<1$. 所以函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,由 $f(m)<f(2-m^2)$,得 $m<2-m^2$,解得$-2<m<1$. 故选 C.

方法二:作出函数 $f(x)$的图象如图所示,由图知,函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,所以由 $f(m)<f(2-m^2)$,得 $m<2-m^2$,解得$-2<m<1$. 故选 C.



7. C 【解析】因为实数 $a>0$,函数 $f(x)=\begin{cases}ax+\frac{5}{2},x\in(-\infty,2),\\x+\frac{a}{x}+2a,x\in[2,+\infty)\end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是单调函数,所以 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,所以$\begin{cases}\sqrt{a}\leqslant 2,\\2a+\frac{5}{2}\leqslant 2+\frac{a}{2}+2a,\end{cases}$

解得 $1\leqslant a\leqslant 4$,所以 a 的取值范围为$[1,4]$. 故选 C.

8. AD 【解析】对于 A,函数 $f(x)=3x+1$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,故 A 正确;对于 B,函数 $f(x)=x+\frac{4}{x}$在$(-\infty,-2)$,$(2,$

$+\infty)$上单调递增，在$(-2,0)$，$(0,2)$上单调递减，故B错误；对于C，函数$f(x)=-(x-1)^2-5$在$(-\infty,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，故C错误；对于D，函数$f(x)=|x+4|$在$(-\infty,-4)$上单调递减，在$(-4,+\infty)$上单调递增，故D正确. 故选AD.

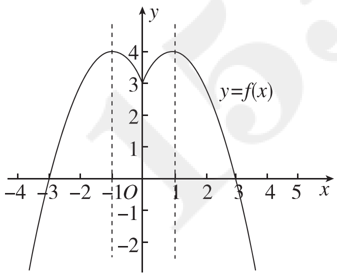
9. AD **[解析]** 对于A，根据复合函数的单调性可知，因为$y=f(x)$是增函数，所以$y=f[f(x)]$也是增函数，A正确；对于B，根据复合函数的单调性可知，因为$y=f(x)$是减函数，所以$y=f[f(x)]$是增函数，B错误；对于C，因为$y=f(x)$是增函数，所以$y=af(x)(a>0)$也是增函数，C错误；对于D，令$f(x)=-\frac{1}{x}$，其定义域为$\{x|x\neq 0\}$，满足$f(a)=-\frac{1}{a}\neq a$，但是$f[f(x)]=f\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{-\frac{1}{x}}=x$，D正确. 故选AD.

10. $[2,+\infty)$ **[解析]** 令$x^2-3x+2\geqslant 0$，解得$x\leqslant 1$或$x\geqslant 2$，故$f(x)$的定义域为$(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$. $y=\sqrt{u}$是增函数，$u=x^2-3x+2$在$(-\infty,1]$上单调递减，在$[2,+\infty)$上单调递增，所以$f(x)$的单调递增区间是$[2,+\infty)$.

11. ①-1　②$(-\infty,-8]\cup\{0\}$ **[解析]** ①若$a=0$，则$f(x)=\begin{cases}-x^2, x\leqslant 0,\\ 8x, x>0,\end{cases}$由$-1\leqslant 0$，得$f(-1)=-(-1)^2=-1$. ②若$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增，则$\begin{cases}a\leqslant 0,\\ -a^2\leqslant 8a,\end{cases}$解得$a\leqslant -8$或$a=0$，则$a$的取值范围是$(-\infty,-8]\cup\{0\}$.

12. $\left(\frac{1}{2},3\right]$ **[解析]** 由题意得$\begin{cases}-2\leqslant 1-m\leqslant 4,\\ -2\leqslant m\leqslant 4,\\ 1-m<m,\end{cases}$解得$\frac{1}{2}<m\leqslant 3$，则实数$m$的取值范围是$\left(\frac{1}{2},3\right]$.

13. **解**：(1)$f(x)=-x^2+2|x|+3=\begin{cases}-x^2+2x+3, x\geqslant 0,\\ -x^2-2x+3, x<0,\end{cases}$画出函数$f(x)$的图象如图所示.



(2)由函数$f(x)$的图象可得，函数$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,-1)$，$(0,1)$，单调递减区间为$(-1,0)$，$(1,+\infty)$.

(3)因为$f(1)=f(-1)=4$，所以由函数$f(x)$的图象可得，$f(x)$的值域为$(-\infty,4]$.

14. **解**：(1)当$a=4$时，$f(x)=\frac{x+4}{x-2}$在$(2,+\infty)$上单调递减.

证明如下：任取$x_1,x_2\in(2,+\infty)$，且$x_1<x_2$，

则$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1+4}{x_1-2}-\frac{x_2+4}{x_2-2}=$

$\frac{(x_1+4)(x_2-2)-(x_2+4)(x_1-2)}{(x_1-2)(x_2-2)}=\frac{6(x_2-x_1)}{(x_1-2)(x_2-2)}$，

由$x_2>x_1>2$，得$x_2-x_1>0$，$x_2-2>0$，$x_1-2>0$，

所以$f(x_1)-f(x_2)=\frac{6(x_2-x_1)}{(x_1-2)(x_2-2)}>0$，即$f(x_1)>f(x_2)$，所以函数$f(x)$在$(2,+\infty)$上单调递减.

(2)若函数$f(x)$在区间$(2,+\infty)$上单调递减，则$a>-2$. 证明如下：任取$x_3,x_4\in(2,+\infty)$，且$x_3<x_4$，

则$f(x_3)-f(x_4)=\frac{x_3+a}{x_3-2}-\frac{x_4+a}{x_4-2}=$

$\frac{(x_3+a)(x_4-2)-(x_4+a)(x_3-2)}{(x_3-2)(x_4-2)}=\frac{(a+2)(x_4-x_3)}{(x_3-2)(x_4-2)}$，

由$x_4>x_3>2$，得$x_4-x_3>0$，$x_4-2>0$，$x_3-2>0$，

由$a>-2$得$a+2>0$，所以$f(x_3)-f(x_4)=\frac{(a+2)(x_4-x_3)}{(x_3-2)(x_4-2)}>0$，即$f(x_3)>f(x_4)$，

所以函数$f(x)$在$(2,+\infty)$上单调递减.

15. C **[解析]** 不妨设$0<x_1<x_2$，则$x_2-x_1>0$，由$\frac{x_1f(x_2)-x_2f(x_1)}{x_2-x_1}>1$，得$\frac{x_1f(x_2)-x_2f(x_1)}{x_2-x_1}-1>0$，即$\frac{x_1x_2\left[\frac{f(x_2)+1}{x_2}-\frac{f(x_1)+1}{x_1}\right]}{x_2-x_1}>0$，结合$x_2-x_1>0$，$x_1x_2>0$得$\frac{f(x_2)+1}{x_2}-\frac{f(x_1)+1}{x_1}>0$，即$\frac{f(x_2)+1}{x_2}>\frac{f(x_1)+1}{x_1}$. 设$g(x)=\frac{f(x)+1}{x}(x>0)$，则该函数在$(0,+\infty)$上单调递增，且$g(3)=\frac{f(3)+1}{3}=1$，则$f(x)<x-1$，即$\frac{f(x)+1}{x}<1$，即$g(x)<g(3)$，故$0<x<3$，即不等式$f(x)<x-1$的解集为$(0,3)$，故选C.

16. **解**：(1)$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增. 证明如下：设$x_1>x_2>0$，则$f(x_1)+f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)=f(x_2)$，即$f(x_2)-f(x_1)=f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$. 因为$0<\frac{x_2}{x_1}<1$，所以$f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)<0$，所以$f(x_2)<f(x_1)$，故$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

(2)由$f(2\times 2)=f(2)+f(2)=4$，得$f(2)=2$. $f(x)+1>\frac{1}{2}f(2x+3)$等价于$2f(x)+f(2)>f(2x+3)$，等价于$f(2x^2)>f(2x+3)$，又$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，所以$2x^2>2x+3>0$，解得$x>\frac{1+\sqrt{7}}{2}$或$-\frac{3}{2}<x<\frac{1-\sqrt{7}}{2}$，所以不等式的解集为$\left\{x\ \middle|\ x>\frac{1+\sqrt{7}}{2}\text{或}-\frac{3}{2}<x<\frac{1-\sqrt{7}}{2}\right\}$.

第2课时　利用单调性求最值

1. A **[解析]** 因为函数$f(x)=\frac{1}{x}$在区间$[2,8]$上单调递减，所以$f(x)$在区间$[2,8]$上的最小值为$f(8)=\frac{1}{8}$，最大值为$f(2)=\frac{1}{2}$. 故选A.

2. C **[解析]** 当$a>0$时，由题意得$2a+1-(a+1)=2$，则$a=2$；当$a<0$时，由题意得$a+1-(2a+1)=2$，则$a=-2$. 综上，$a=\pm 2$. 故选C.

3. D **[解析]** 由题意得$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增，$\therefore f(x)<f(0)=-1$，故函数$f(x)$既无最大值又无最小值.

故选 D.

4. B 【解析】函数 $f(x)=-x^2+6x$ 在$[0,3)$上单调递增,在$(3,5]$上单调递减,所以 $f(x)_{\max}=f(3)=9$,又 $f(0)=0$,$f(5)=5$,所以 $f(x)_{\min}=0$,故函数 $f(x)$的值域为$[0,9]$. 故选 B.

5. C 【解析】由 $y=x$ 在$[1,4]$上单调递增,且 $y=-\frac{2}{x}$在$[1,4]$上单调递增,可得 $f(x)=x-\frac{2}{x}+1$ 在$[1,4]$上单调递增,又 $f(1)=0$,$f(4)=\frac{9}{2}$,所以 $f(x)$在$[1,4]$上的取值范围为$\left[0,\frac{9}{2}\right]$,故选 C.

6. D 【解析】由题意可得 $w(x)=28x-C(x)=-x^2+24x-16=-(x-12)^2+128$,故当 $x=12$ 时,$w(x)$取得最大值 128. $\frac{w(x)}{x}=\frac{24x-x^2-16}{x}=24-\left(x+\frac{16}{x}\right)\leqslant 24-2\sqrt{x\cdot\frac{16}{x}}=16$,当且仅当 $x=4$ 时,等号成立. 故当一个月生产 12 万件时,当月的总利润最大,为 128 万元;当一个月生产 4 万件时,当月的单件平均利润最大,为 16 元. 故选 D.

7. A 【解析】因为函数 $f(x)$的最小值为 $f(1)$,所以函数 $f(x)$在$(-\infty,1]$上单调递减,则 $a\geqslant 1$,$f(1)=3-2a$. 当 $x>1$ 时,由基本不等式可得 $f(x)=x+\frac{16}{x}-3a\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{16}{x}}-3a=8-3a$,当且仅当 $x=4$ 时,等号成立. 由题意可得 $3-2a\leqslant 8-3a$,解得 $a\leqslant 5$. 综上,$1\leqslant a\leqslant 5$. 故选 A.

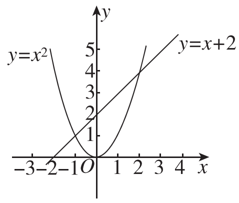
8. ACD 【解析】对于 A,$f(x)$的单调递减区间为$(0,2)$,A 正确;对于 B,当 $x=0$ 时,$f(x)_{\max}=3$,B 错误;对于 C,当 $x=2$ 时,$f(x)_{\min}=-1$,C 正确;对于 D,$f(x)$的单调递增区间为$[-1,0)$和$(2,5]$,D 正确. 故选 ACD.

9. CD 【解析】当 $x\in[1,3]$时,$f(x)=x+\frac{4}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4$,当且仅当 $x=\frac{4}{x}$,即 $x=2$ 时,等号成立,所以 $f(x)$在$[1,3]$上的最小值为 4. $g(x)=x^2-ax+1=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+1-\frac{a^2}{4}$,当$\frac{a}{2}\leqslant 2$,即 $a\leqslant 4$ 时,$g(x)$在$[1,3]$上的最大值为 $g(3)=10-3a$,由 $4\geqslant 10-3a$,解得 $a\geqslant 2$,所以 $2\leqslant a\leqslant 4$;当$\frac{a}{2}>2$,即 $a>4$ 时,$g(x)$在$[1,3]$上的最大值为 $g(1)=2-a$,由 $4\geqslant 2-a$,解得 $a\geqslant -2$,所以 $a>4$. 综上可知,实数 a 的取值范围是$[2,+\infty)$. 故选 CD.

10. $\frac{7}{6}$ 【解析】$f(x)=\frac{2x+3}{x+4}=\frac{2(x+4)-5}{x+4}=2-\frac{5}{x+4}$在$[2,4]$上单调递增,故 $f(x)$在区间$[2,4]$上的最小值为 $f(2)=\frac{7}{6}$.

11. -2 【解析】由题意可知$\begin{cases}a>0,\\ \Delta=4-4a\geqslant 0,\end{cases}$解得 $0<a\leqslant 1$,且$\begin{cases}x_1+x_2=-2,\\ x_1x_2=a,\end{cases}$故$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\frac{2}{a}$. 因为 $f(a)=-\frac{2}{a}$在$(0,1]$上单调递增,所以当 $a=1$ 时,$f(a)=-\frac{2}{a}$取得最大值-2,所以$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$的最大值为$-2$.

12. $[-1,+\infty)$ 【解析】作出 $y=x^2$,$y=x+2$ 的图象如图所示,令 $x^2=x+2$,解得 $x=-1$ 或 $x=2$. 由图可知,要使 $f(x)$有最小值,则 $a\geqslant -1$,所以 a 的取值范围是$[-1,+\infty)$.



13. 解:(1)函数 $f(x)$的图象的对称轴为直线 $x=-1$,因为 $x\in[-2,2]$,所以函数 $f(x)$在$[-2,-1]$上单调递减,在$[-1,2]$上单调递增,故函数 $f(x)$在$[-2,2]$上的最小值为 $f(-1)=1$,最大值为 $f(2)=10$.

(2)由题意得 $h(x)=x^2+2(1-t)x+2$,其图象开口向上,对称轴为直线 $x=t-1$.

①当 $t-1\leqslant 1$,即 $t\leqslant 2$ 时,函数 $h(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增,$h(x)$在$[1,+\infty)$上的最小值为 $h(1)=5-2t$;

②当 $t-1>1$,即 $t>2$ 时,函数 $h(x)$在$[1,t-1]$上单调递减,在$[t-1,+\infty)$上单调递增,$h(x)$在$[1,+\infty)$上的最小值为 $h(t-1)=-t^2+2t+1$.

综上,$g(t)=\begin{cases}5-2t(t\leqslant 2),\\ -t^2+2t+1(t>2).\end{cases}$

14. 解:(1)生产每吨产品的平均成本为$\frac{y}{x}$万元,

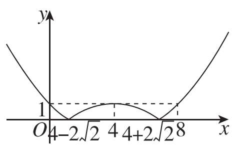
$\because \frac{y}{x}=\frac{x}{5}+\frac{8000}{x}-50\geqslant 2\sqrt{\frac{x}{5}\cdot\frac{8000}{x}}-50=30$,

当且仅当$\frac{x}{5}=\frac{8000}{x}$,即 $x=200$ 时等号成立,

$\therefore$当年产量为 200 吨时,生产每吨产品的平均成本最低,最低平均成本为 30 万元.

(2)设年利润为 $R(x)$万元,则 $R(x)=40x-y=40x-\frac{x^2}{5}+50x-8000=-\frac{x^2}{5}+90x-8000=-\frac{1}{5}(x-225)^2+2125$ $(0<x\leqslant 300)$,$\therefore$当 $x=225$ 时,$R(x)$有最大值,最大值为 2125,$\therefore$当年产量为 225 吨时,年利润最大,最大年利润为 2125 万元.

15. $[4-2\sqrt{3},1]$ 【解析】作出函数 $f(x)$的图象如图所示,$f(x)$的图象的对称轴为直线 $x=4$,且 $f(4)=f(0)=f(8)=1$. 令 $f(x)=0$,得

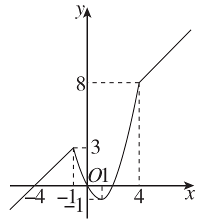


$x=4\pm 2\sqrt{2}$. 当 $a>8$ 时,$M_{[0,a]}=f(a)$,$M_{[a,2a]}=f(2a)$,依题意得 $f(a)\geqslant 2f(2a)$,因为函数 $f(x)$在$[4+2\sqrt{2},+\infty)$上单调递增,$4+2\sqrt{2}<a<2a$,所以 $0<f(a)<f(2a)$,矛盾,故 $a>8$ 不满足题意. 当 $a\leqslant 8$ 时,$M_{[0,a]}=1$,依题意得 $1\geqslant 2M_{[a,2a]}$,即 $M_{[a,2a]}\leqslant\frac{1}{2}$. 令 $f(x)=\frac{1}{2}$,解得 $x_1=4-2\sqrt{3}$,$x_2=2$,$x_3=6$,$x_4=4+2\sqrt{3}$,则①$a\geqslant 4-2\sqrt{3}$且 $2a\leqslant 2$,解得 $4-2\sqrt{3}\leqslant a\leqslant 1$;②$a\geqslant 6$ 且 $2a\leqslant 4+2\sqrt{3}$,无解. 综上,$4-2\sqrt{3}\leqslant a\leqslant 1$.

16. 解:(1)由 $x+4=x^2-2x$,即 $x^2-3x-4=0$,解得 $x=-1$ 或 $x=4$.

根据题意得 $m(x)=\begin{cases}x+4,x\leqslant -1\text{ 或 }x\geqslant 4,\\ x^2-2x,-1<x<4.\end{cases}$

函数 $m(x)$ 的图象如图所示.



(2)由 $m(x)$ 的图象可知,函数 $m(x)$ 在区间 $(-\infty,-1]$ 上单调递增,在区间 $(-1,1)$ 上单调递减,在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递增.

由 $m(-4)=0,m(-1)=3,m(1)=-1,m(4)=8$ 知,$m(x)$ 在 $[-4,4]$ 上的最大值为 $m(4)=8$,最小值为 $m(1)=-1$.

3.2.2 奇偶性

第1课时 奇偶性的概念

1. C 【解析】根据奇偶函数的性质知A,B中说法正确;对于C,如 $f(x)=\frac{1}{x},x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,易得函数 $f(x)$ 是奇函数,它的图象不过原点,故C中说法错误;对于D,如 $g(x)=\frac{1}{x^2},x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,易得函数 $g(x)$ 是偶函数,它的图象不与 y 轴相交,故D中说法正确.故选C.

2. D 【解析】函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,因为 $f(-x)=-2x+\frac{1}{x}=-\left(2x-\frac{1}{x}\right)=-f(x)$,所以函数 $f(x)$ 是奇函数,则函数 $f(x)=2x-\frac{1}{x}$ 的图象关于坐标原点对称.故选D.

3. C 【解析】因为 $f(x)=-x^3+(a-2)x^2+x$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,则由奇函数的性质可得 $f(x)+f(-x)=-x^3+(a-2)x^2+x-(-x)^3+(a-2)(-x)^2-x=2(a-2)x^2=0$ 恒成立,所以 $a=2$,所以 $f(x)=-x^3+x$,所以 $f(a)=f(2)=-2^3+2=-6$.故选C.

4. D 【解析】因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且当 $x<0$ 时,$f(x)=x-1$,所以 $f(1)=-f(-1)=-(-1-1)=2$,故选D.

5. B 【解析】由题意,定义域 $(-2a+2,0)\cup(0,a)$ 关于原点对称,则 $-2a+2=-a$,解得 $a=2$,则 $f(x)=\frac{2x^3+x+2-2b}{x}$,又 $f(x)$ 是偶函数,所以 $f(-x)=f(x)$,即 $\frac{2(-x)^3-x+2-2b}{-x}=\frac{2x^3+x+2-2b}{x}$ 恒成立,解得 $b=1$,则 $f(x)=\frac{2x^3+x}{x}=2x^2+1,x\in(-2,0)\cup(0,2)$,所以 $f(1)=2\times1^2+1=3$.故选B.

6. D 【解析】在 y 轴左侧作函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称的图象,得到 $y=f(|x|)$ 的图象,再将 $y=f(|x|)$ 的图象向上平移一个单位长度,得到 $y=f(|x|)+1$ 的图象.故选D.

7. C 【解析】由题图得,当 $x>0$ 时,$f(x)<0$ 的解为 $2<x\leqslant5$,因为函数 $f(x)$ 为奇函数,所以当 $x<0$ 时,若 $f(x)<0$,即 $-f(-x)<0$,则 $f(-x)>0$,所以 $0<-x<2$,解得 $-2<x<0$,所以不等式 $f(x)<0$ 的解集是 $(-2,0)\cup(2,5]$.故选C.

8. CD 【解析】函数 $y=2-x$ 是非奇非偶函数,A错误;函数 $y=x^2+2$ 是偶函数,B错误;函数 $y=-\frac{1}{x}$ 和 $y=2x+x^3$ 都是奇函数,且都在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,C,D正确.故选CD.

9. ABD 【解析】$\because f(x)$ 是奇函数,$g(x)$ 是偶函数,$\therefore y=|f(x)|$ 为偶函数,$y=|g(x)|$ 为偶函数,$\therefore y=f(x)g(x)$ 为奇函数,$y=|f(x)|g(x)$ 为偶函数,$y=f(x)|g(x)|$ 为奇函数,$y=|f(x)g(x)|$ 为偶函数.故选ABD.

10. -1 【解析】因为函数 $f(x)=\frac{x+b}{\sqrt{|(a-x)(1-x)|}}$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq1$ 且 $x\neq a\}$,且是奇函数,所以 $a=-1$,所以 $f(x)=\frac{x+b}{\sqrt{|(-1-x)(1-x)|}}=\frac{x+b}{\sqrt{|1-x^2|}}$,又 $f(-x)=-f(x)$,所以 $\frac{-x+b}{\sqrt{|1-(-x)^2|}}=-\frac{x+b}{\sqrt{|1-x^2|}}$,所以 $b=0$,故 $a+b=-1$.

11. 0 【解析】$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,$\because f(-x)=-x^3-2x=-f(x)$,$\therefore f(-x)+f(x)=0$,故 $f(a)+f(-a)=0$.

12. $>$ 【解析】因为 $f(x)$ 是定义在 $[-6,6]$ 上的奇函数,所以 $f(5)=-f(-5),f(2)=-f(-2)$,又 $f(5)>f(2)$,所以 $-f(-5)>-f(-2)$,即 $f(-2)>f(-5)$.

13. 解:(1)因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,0)\cup(0,1]$,不关于原点对称,所以函数 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

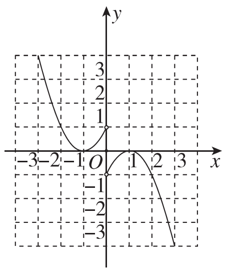
(2)由 $1-x^2\geqslant0$,得 $-1\leqslant x\leqslant1$,

由 $|x+2|-2\neq0$,得 $x\neq0$,所以 $g(x)$ 的定义域为 $\{x\mid-1\leqslant x\leqslant1$ 且 $x\neq0\}$,关于原点对称,

则 $x+2>0$,所以 $g(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x+2-2}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

因为 $g(-x)=\frac{\sqrt{1-(-x)^2}}{-x}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=-g(x)$,所以 $g(x)$ 为奇函数.

14. 解:(1)函数 $f(x)$ 的图象如图所示.



(2)由图象可得函数 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$,

单调递增区间为 $(-1,0),(0,1)$,

单调递减区间为 $(-\infty,-1),(1,+\infty)$.

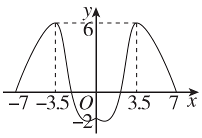
15. 2 【解析】由 $(x-1)^3+2024(x-1)=-2,(y-1)^3+2024(y-1)=2$,令 $f(t)=t^3+2024t$,则 $f(x-1)=-f(y-1)$,易知 $f(t)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,又 $f(-t)=(-t)^3+2024(-t)=-(t^3+2024t)=-f(t)$,所以 $f(t)$ 为奇函数,故 $x-1=-(y-1)$,则 $x+y=2$.

16. 解:(1)证明:令 $b=-a$,得 $f(a)+f(-a)=f(a-a)=f(0)$,令 $a=1,b=0$,得 $f(1)+f(0)=f(1)$,则 $f(0)=0$,所以 $f(x)+f(-x)=0$,故 $f(x)$ 为奇函数.

(2)设当 $x=m$ 时,$f(x)$ 取得最大值4,即 $f(m)=4$,因为函数 $f(x)$ 是奇函数,所以当 $x=-m$ 时,$f(x)$ 取得最小值,最小值为 $f(-m)=-f(m)=-4$.

第 2 课时　奇偶性的应用

1. C 【解析】根据偶函数 $f(x)$ 在 $[0,7]$ 上的图象，作出函数 $f(x)$ 在 $[-7,0]$ 上的图象，如图所示. 由图可知函数 $f(x)$ 有三个单调递增区间，三个单调递减区间，且在其定义域内有最大值 6，但最小值不是 -6. 故选 C.

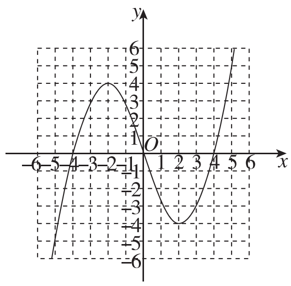


2. A 【解析】由题意知 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(3)=-f(-3)=-2$，所以点 $(3,-2)$ 一定在函数 $f(x)$ 的图象上.
3. B 【解析】$\because f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，$\therefore f(-3)=f(3)$，又 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore f(-3)=f(3)>f(1)>f(0)$. 故选 B.
4. A 【解析】函数 $f(x)=\dfrac{-x}{x-1}=-1+\dfrac{-1}{x-1}$，则 $f(1+x)+f(1-x)=-1+\dfrac{-1}{x}-1+\dfrac{1}{x}=-2$，可得 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,-1)$ 对称，故选 A.
5. A 【解析】由 $f(x)+g(x)=x^2-x+1$①，得 $f(-x)+g(-x)=x^2+x+1$，因为 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，$g(-x)=g(x)$，所以 $-f(x)+g(x)=x^2+x+1$②，①－②得 $2f(x)=-2x$，所以 $f(x)=-x$，则 $f(2)=-2$. 故选 A.
6. B 【解析】因为函数 $y=f(x-1)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，所以函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,0)$ 对称，即 $f(x)$ 为奇函数，故 $f(-x)+f(x)=a(-x)^3-(-x)^{-3}+a+ax^3-x^{-3}+a=2a=0$，所以 $a=0$. 故选 B.
7. A 【解析】因为函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，在 $(-\infty,0]$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，又因为 $f(2)=0$，所以 $f(-2)=f(2)=0$，所以当 $x<-2$ 或 $x>2$ 时，$f(x)<0$，当 $-2<x<2$ 时，$f(x)>0$. 由 $(x+2)f(x)<0$，得 $\begin{cases}x+2>0,\\f(x)<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+2<0,\\f(x)>0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}x>-2,\\x<-2\text{ 或 }x>2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<-2,\\-2<x<2,\end{cases}$ 解得 $x>2$，所以不等式 $(x+2)f(x)<0$ 的解集为 $(2,+\infty)$，故选 A.
8. ABD 【解析】对于 A，函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$，关于原点对称，$f(-x)=\dfrac{|-x|+2}{(-x)^2-4}=\dfrac{|x|+2}{x^2-4}=f(x)$，即函数 $f(x)$ 为偶函数，其图象关于 y 轴对称，故 A 正确；对于 B，当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f(x)=\dfrac{|x|+2}{x^2-4}=\dfrac{x+2}{x^2-4}=\dfrac{1}{x-2}$，所以函数 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递减，故 B 正确；对于 C，当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f(x)\in(0,+\infty)$，当 $x\in[0,2)$ 时，$f(x)\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$，结合偶函数图象的对称性知 $f(x)$ 的值域为 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]\cup(0,+\infty)$，故 C 错误；对于 D，由 C 知，当 $x\in(-2,2)$ 时，$f(x)$ 有最大值 $-\dfrac{1}{2}$，故 D 正确. 故选 ABD.
9. BD 【解析】由 $f(2-x)+f(x)=0$ 知，函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 中心对称，A 错误；因为函数 $f(x)$ 为偶函数，所以函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，且 $f(2-x)=f(x-2)$，又 $f(2-x)+f(x)=0$，所以 $f(x-2)+f(x)=0$，所以 $f(x-2)=-f(x)=-[-f(x+2)]=f(x+2)$，所以 $f(x)=f(x+4)$，易知函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(-1,0)$ 中心对称，所以 $f(3)=f(-1)=0$，B 正确；$y=f(x-1)$ 的图象由 $f(x)$ 的图象向右平移一个单位长度得到，则 $y=f(x-1)$ 的图象关于点 $(0,0)$ 中心对称，即 $y=f(x-1)$ 为奇函数，C 错误；$y=f(x+1)$ 的图象由 $f(x)$ 的图象向左平移一个单位长度得到，则 $y=f(x+1)$ 的图象关于点 $(0,0)$ 中心对称，即 $y=f(x+1)$ 为奇函数，D 正确. 故选 BD.
10. $-x^2-1$ 【解析】由题意可知，$f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2+1$，当 $x<0$ 时，$-x>0$，所以 $f(-x)=(-x)^2+1=x^2+1$，所以 $-f(x)=x^2+1$，即 $f(x)=-x^2-1$.
11. 23 【解析】$\because$ 函数 $f(x)=(1-x^2)(x^2+ax+b)$ 的图象关于直线 $x=-2$ 对称，$\therefore f(-1)=f(-3)=0$，且 $f(1)=f(-5)=0$，即 $[1-(-3)^2][(-3)^2+a\cdot(-3)+b]=0$，且 $[1-(-5)^2][(-5)^2+a\cdot(-5)+b]=0$，解得 $a=8$，$b=15$，则 $a+b=23$.
12. $m>3$ 【解析】$\because f(x)$ 是奇函数，$\therefore$ 不等式 $f(2m)+f(m-9)>0$ 等价于 $f(2m)>-f(m-9)=f(9-m)$，又 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，$\therefore 2m>9-m$，解得 $m>3$.
13. **解：**(1) 当 $x<0$ 时，$-x>0$，所以 $f(-x)=-x(-x-4)=x(x+4)$，又因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，

所以 $f(x)=-x(x+4)$，

所以 $f(x)=\begin{cases}x(x-4),x\geqslant0,\\-x(x+4),x<0.\end{cases}$

(2) 作出函数 $f(x)$ 的图象如图所示.



由图可知，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-2)$ 和 $(2,+\infty)$.

(3) 由图可知，$f(x)$ 在 $[-5,-2)$ 上单调递增，在 $\left(-2,\dfrac{1}{2}\right]$ 上单调递减，

所以当 $x=-2$ 时，$f(x)$ 在区间 $\left[-5,\dfrac{1}{2}\right]$ 上取得最大值 4.

当 $x=-5$ 时，$f(-5)=5\times(-5+4)=-5$，

当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}-4\right)=-\dfrac{7}{4}$，因为 $-5<-\dfrac{7}{4}$，所以当 $x=-5$ 时，$f(x)$ 在区间 $\left[-5,\dfrac{1}{2}\right]$ 上取得最小值 -5.

综上，$f(x)$ 在区间 $\left[-5,\dfrac{1}{2}\right]$ 上的最大值为 4，最小值为 -5.

14. **解：**(1) 因为函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{1+x^2}$ 是定义在 $(-1,1)$ 上的奇函

数,所以 $f(-x)=-f(x)$,即 $\frac{-ax+b}{1+x^2}=-\frac{ax+b}{1+x^2}$,可得 $b=0$,所以 $f(x)=\frac{ax}{1+x^2}$.

由 $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{10}$,可得 $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\frac{1}{3}a}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{3}{10}a=\frac{3}{10}$,解得 $a=1$,所以 $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$.

(2)证明:$\forall x_1,x_2\in(-1,1)$,且 $x_1<x_2$,

则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{1+x_1^2}-\frac{x_2}{1+x_2^2}=\frac{x_1(1+x_2^2)-x_2(1+x_1^2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}=\frac{(x_1-x_2)(1-x_1x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$,

因为 $x_1,x_2\in(-1,1)$,且 $x_1<x_2$,所以 $x_1-x_2<0$,$x_1x_2<1$,即 $1-x_1x_2>0$,

可得 $\frac{(x_1-x_2)(1-x_1x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}<0$,所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$,即 $f(x_1)<f(x_2)$,所以 $f(x)$在$(-1,1)$上为增函数.

(3)将不等式 $f(x-1)+f(2x)<0$ 转化为 $f(x-1)<-f(2x)$,又 $f(x)$ 是定义在$(-1,1)$上的奇函数,所以 $f(x-1)<f(-2x)$,又 $f(x)$在$(-1,1)$上为增函数,所以 $\begin{cases}x-1<-2x,\\-1<x-1<1,\\-1<2x<1,\end{cases}$ 解得 $0<x<\frac{1}{3}$,

即不等式 $f(x-1)+f(2x)<0$ 的解集为 $\left(0,\frac{1}{3}\right)$.

15. $(-2,0)\cup(2,+\infty)$ **[解析]** 因为对任意的 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$,且 $x_1\neq x_2$,都有 $\frac{x_1f(x_1)-x_2f(x_2)}{x_1-x_2}<0$,不妨设 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$且 $x_1<x_2$,则 $x_1f(x_1)-x_2f(x_2)>0$ 恒成立,令 $g(x)=xf(x)$,$x\neq0$,则 $g(x_1)-g(x_2)=x_1f(x_1)-x_2f(x_2)>0$,所以函数 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,又函数 $f(x)$为定义在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上的奇函数,所以 $g(x)$为偶函数,且 $g(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增.由 $f(-2)=0$,可得 $g(2)=g(-2)=-2f(-2)=0$,所以当 $x<-2$ 或 $x>2$ 时,$g(x)<0$,当 $-2<x<2$ 且 $x\neq0$ 时,$g(x)>0$.不等式 $f(x)<0$,即为 $\frac{g(x)}{x}<0$,当 $x>0$ 时,不等式可化为 $g(x)<0$,可得 $x>2$,当 $x<0$ 时,不等式可化为 $g(x)>0$,可得 $-2<x<0$,所以不等式 $f(x)<0$ 的解集为 $(-2,0)\cup(2,+\infty)$.

16. **解:**(1)由题意设函数 $f(x)=x^3-6x^2$ 图象的对称中心为 $P(a,b)$,由于函数 $y=f(x)$的图象关于点 $P(a,b)$成中心对称图形的充要条件是函数 $y=f(x+a)-b$ 为奇函数,

即函数 $g(x)=f(x+a)-b$ 为奇函数,

而 $g(x)=(x+a)^3-6(x+a)^2-b=x^3+(3a-6)x^2+(3a^2-12a)x+a^3-6a^2-b$,

由于 $x\in\mathbf{R}$,$g(-x)=-g(x)$,即 $-x^3+(3a-6)x^2-(3a^2-12)x+a^3-6a^2-b=-x^3-(3a-6)x^2-(3a^2-12a)x-(a^3-6a^2-b)$,

所以 $\begin{cases}3a-6=0,\\a^3-6a^2-b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\b=-16,\end{cases}$

即函数 $f(x)=x^3-6x^2$ 图象的对称中心为$(2,-16)$.

(2)由(1)的结论可知 $f(x)+f(4-x)=-32$,

则 $f(-100)+f(104)=-32$,$f(-99)+f(103)=-32$,…,$f(1)+f(3)=-32$,而 $f(2)=-16$,

故 $f(-100)+f(-99)+\cdots+f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(103)+f(104)=[f(-100)+f(104)]+[f(-99)+f(103)]+\cdots+[f(1)+f(3)]+f(2)=-32\times102+(-16)=-3280$.

滚动习题(四)

1. D **[解析]** A 中,一部分 x 值没有与之对应的 y 值,不能构成 A 到 B 的函数;B 中,“一对多”的关系不是函数关系;C 中,当 $x=1$ 时对应两个不同的 y 值,不构成函数;D 中,对应关系符合函数定义.故选 D.

2. C **[解析]** 由题意,函数的定义域需满足 $\begin{cases}1-x^2\geqslant0,\\x^3\neq0,\end{cases}$ 解得 $x\in[-1,0)\cup(0,1]$.故选 C.

3. C **[解析]** 令 $x+3>9-x$,解得 $x>3$;令 $x+3\leqslant9-x$,解得 $x\leqslant3$.所以 $f(x)=\begin{cases}x+3,x\leqslant3,\\9-x,x>3.\end{cases}$ 当 $x\leqslant3$ 时,$f(x)$单调递增,当 $x>3$ 时,$f(x)$单调递减,则 $f(x)$的最大值为 $f(3)=6$.故选 C.

4. C **[解析]** 函数 $f(x)=x^2+3x+1$ 在$\left[-2,-\frac{3}{2}\right)$上单调递减,在$\left(-\frac{3}{2},1\right]$上单调递增,所以当 $x=-\frac{3}{2}$ 时,函数 $f(x)$取得最小值 $-\frac{5}{4}$,当 $x=1$ 时,函数 $f(x)$取得最大值 5,所以 $f(x)$的值域为$\left[-\frac{5}{4},5\right]$.故选 C.

5. A **[解析]** 由函数 $f(x)$是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数,$f(x)$在$[-1,0]$上单调递减,可知 $f(x)$在$[0,1]$上单调递增,又 $f(x+2)=f(x)$,所以 $f(x)$在$[2,3]$上的单调性与在$[0,1]$上的单调性相同,所以 $f(x)$在$[2,3]$上单调递增,故选 A.

6. C **[解析]** 函数 $f(x)$的定义域是 $\mathbf{R}$,且 $f(-x)=-x|x|+2x=-(x|x|-2x)=-f(x)$,即函数 $f(x)$是奇函数.当 $x\geqslant0$ 时,$f(x)=x^2-2x$,函数 $f(x)$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增,根据奇函数图象的对称性,可知函数 $f(x)$的单调递增区间是$(-\infty,-1)$和$(1,+\infty)$,单调递减区间是$(-1,1)$,故选 C.

7. ABD **[解析]** 对于 A,$f(x)$的定义域为$\{x|x\neq0\}$,$g(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,两函数的定义域不同,故 A 符合题意;对于 B,$f(x)$和 $g(x)$的定义域都为 $\mathbf{R}$,但 $f(x)=\sqrt{x^2}=|x|$,$g(x)=\sqrt[3]{x^3}=x$,两函数的对应关系不同,故 B 符合题意;对于 C,$f(x)$和 $g(x)$的定义域都为 $\mathbf{R}$,且 $f(x)=\sqrt{(x+3)^2}=|x+3|=g(x)$,即两函数的定义域和对应关系都相同,故 C 不符合题意;对于 D,$f(x)$的定义域为$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$,$g(x)$的定义域为$[1,+\infty)$,两函数的定义域不同,故 D 符合题意.故选 ABD.

8. ABD **[解析]** 由 $f(x-1)=\frac{2}{x}=\frac{2}{(x-1)+1}$,可得 $f(x)=\frac{2}{x+1}(x\neq-1)$,故 B 正确;$f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{-\frac{1}{3}+1}=3$,故 A 正

确;函数 $f(x)=\frac{2}{x+1}(x\neq -1)$ 的定义域不关于原点对称,所以函数 $f(x)$ 不是奇函数,故 C 错误;由 $y=\frac{2}{x}(x\neq 0)$ 的图象关于坐标原点中心对称,可得函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(-1,0)$ 中心对称,故 D 正确. 故选 ABD.

9. 3 **【解析】** ∵ $\frac{1}{2}\in(-\infty,1]$,∴ $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$,则 $10f\left(\frac{1}{2}\right)=10$,故 $f\left[10f\left(\frac{1}{2}\right)\right]=f(10)$,又 $10\in[2,+\infty)$,∴ $f(10)=3$.

10. $\left[-1,-\frac{2}{3}\right]$ **【解析】** 当 $a\neq 0$ 时,由题意可得 $\begin{cases}a<0,\\ -\frac{-(2a+4)}{2a}\leqslant -1,\\ -(-1)+2\geqslant a-(2a+4)\times(-1)+1,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant a\leqslant -\frac{2}{3}$;当 $a=0$ 时,$f(x)=\begin{cases}-4x+1, x>-1,\\ -x+2, x\leqslant -1\end{cases}$ 不是 **R** 上的减函数. 故 a 的取值范围为 $\left[-1,-\frac{2}{3}\right]$.

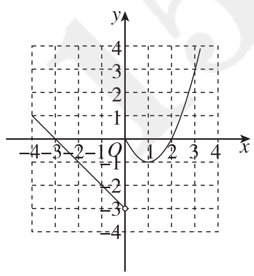
11. $(-\infty,-3]$ **【解析】** ∵函数 $f(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{x-|x-a|}$ 为偶函数,$y=\sqrt{9-x^2}$ 的定义域为 $[-3,3]$,且为偶函数,∴ $y=x-|x-a|$ 在 $[-3,3]$(或其子集)上为偶函数,∴ $x-a\geqslant 0$ 对任意 $x\in[-3,3]$ 恒成立,∴ $a\leqslant x$ 对任意 $x\in[-3,3]$ 恒成立,∴ $a\leqslant -3$.

12. -4 **【解析】** 当 $x=-1$ 时,$f(x)=\langle -1\rangle+\langle -2\rangle=-3$;当 $-1<x\leqslant -\frac{1}{2}$ 时,$\langle x\rangle=0$,$-2<2x\leqslant -1$,则 $\langle 2x\rangle=-1$,$f(x)=\langle x\rangle+\langle 2x\rangle=-1$;当 $-\frac{1}{2}<x\leqslant 0$ 时,$\langle x\rangle=0$,$-1<2x\leqslant 0$,则 $\langle 2x\rangle=0$,$f(x)=\langle x\rangle+\langle 2x\rangle=0$. 故 $A=\{-3,-1,0\}$,集合 A 中所有元素的和为 -4.

13. **解:**(1) $f(1)=1^2-2\times 1=-1$,$f(-6)=6-3=3$,

所以 $f[f(-6)]=f(3)=3^2-2\times 3=3$.

(2)由题意,得函数 $f(x)$ 的图象如图.



(3)函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,0)$,$(0,1)$,单调递增区间为 $(1,+\infty)$,函数 $f(x)$ 的值域为 $(-3,+\infty)$.

14. **解:**(1)证明:$\forall x_1,x_2\in(0,3]$,且 $x_1<x_2$,则 $f(x_1)-f(x_2)=x_1+\frac{9}{x_1}-x_2-\frac{9}{x_2}=(x_1-x_2)\cdot\frac{x_1x_2-9}{x_1x_2}$,

因为 $0<x_1<x_2\leqslant 3$,所以 $x_1-x_2<0$,$x_1x_2>0$,$x_1x_2-9<0$,所以 $(x_1-x_2)\cdot\frac{x_1x_2-9}{x_1x_2}>0$,

所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$,即 $f(x_1)>f(x_2)$,

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,3]$ 上单调递减.

(2)当 $x>0$ 时,$f(x)=x+\frac{9}{x}\geqslant 6$(当且仅当 $x=3$ 时,等号成立),所以 $f(3)=6$,令 $f(x)=10$,解得 $x=1$ 或 $x=9$.

由(1)可易得 $f(x)$ 在 $(3,+\infty)$ 上单调递增,

结合函数 $f(x)$ 的图象可知,$[1,3]\subseteq[m,n]\subseteq[1,9]$ 或 $[3,9]\subseteq[m,n]\subseteq[1,9]$,所以当 $[1,3]=[m,n]$ 时,$n-m$ 取得最小值,最小值为 $3-1=2$,

当 $[m,n]=[1,9]$ 时,$n-m$ 取得最大值,最大值为 $9-1=8$,

故 $n-m$ 的取值范围为 $[2,8]$.

15. **解:**(1)函数 $f(x)$ 是奇函数,证明如下:

令 $x=y=0$,则 $f(0)+f(0)=f(0)$,解得 $f(0)=0$. 由 $x\in(-1,1)$,得 $-x\in(-1,1)$,令 $y=-x$,则 $f(x)+f(-x)=f\left(\frac{x-x}{1-x^2}\right)=f(0)=0$,∴ $f(x)$ 为定义在 $(-1,1)$ 上的奇函数.

(2)函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递减,证明如下:

$\forall x_1,x_2\in(-1,1)$,且 $x_1<x_2$,

则 $-x_2\in(-1,1)$,∴ $f(x_1)+f(-x_2)=f\left(\frac{x_1-x_2}{1-x_1x_2}\right)$.

∵ $-1<x_1<x_2<1$,∴ $1-x_1x_2>0$,则 $\frac{x_1-x_2}{1-x_1x_2}<0$,又 $\frac{x_1-x_2}{1-x_1x_2}-(-1)=\frac{x_1-x_2+1-x_1x_2}{1-x_1x_2}=\frac{(1+x_1)(1-x_2)}{1-x_1x_2}>0$,∴ $-1<\frac{x_1-x_2}{1-x_1x_2}<0$,又当 $x\in(-1,0)$ 时,$f(x)>0$,

∴ $f\left(\frac{x_1-x_2}{1-x_1x_2}\right)>0$,∴ $f(x_1)+f(-x_2)>0$,

即 $f(x_1)-f(x_2)>0$,即 $f(x_1)>f(x_2)$,∴ $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递减.

(3)由 $f(x+1)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)>0$,得 $f(x+1)>-f\left(\frac{1}{1-x}\right)=f\left(\frac{1}{x-1}\right)$,∵ $f(x)$ 是 $(-1,1)$ 上的减函数,

∴ $\begin{cases}-1<x+1<1,\\ -1<\frac{1}{x-1}<1,\\ x+1<\frac{1}{x-1},\end{cases}$ 解得 $-2<x<-\sqrt{2}$,

∴不等式 $f(x+1)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)>0$ 的解集为 $(-2,-\sqrt{2})$.

3.3 幂函数

1. D **【解析】** 因为幂函数 $f(x)=x^m$ 的图象过点 $(2,\sqrt{2})$,所以 $f(2)=2^m=\sqrt{2}$,故 $m=\frac{1}{2}$. 故选 D.

2. C **【解析】** 设幂函数 $f(x)=x^\alpha$,则 $(-3)^\alpha=-27$,解得 $\alpha=3$,所以 $f(x)=x^3$,故 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$. 故选 C.

3. B **【解析】** 因为 $y=x^3$ 的定义域为 **R** 且为奇函数,故其图象应为①;$y=x^2$ 的图象为开口向上的抛物线且顶点为原点,应为②;$y=x^{\frac{1}{2}}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$ 且为增函数,其图象应为③;$y=x^{-1}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,且在 $(-\infty,0)$,$(0,+\infty)$ 上单调递减,其图象应为④. 故选 B.

4. B **【解析】** 由题意得 $\begin{cases}m^2-3m+3=1,\\ m-2\leqslant 0,\end{cases}$ 解得 $m=1$ 或 $m=2$.

5. D 【解析】因为 $y=(m^2-m-1)x^{m^2-2m}$ 是幂函数,所以 $m^2-m-1=1$,解得 $m=-1$ 或 $m=2$.当 $m=-1$ 时,$y=x^3$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,满足题意;当 $m=2$ 时,$y=x^0=1$ 在 $(0,+\infty)$ 上不单调,不满足题意.故选 D.

6. D 【解析】设 $f(x)=x^{\alpha}$,将 $\left(\sqrt{2},\frac{1}{2}\right)$ 代入,得 $(\sqrt{2})^{\alpha}=\frac{1}{2}$,即 $2^{\frac{\alpha}{2}}=2^{-1}$,所以 $\frac{\alpha}{2}=-1$,则 $\alpha=-2$,所以 $f(x)=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$.因为 $x^2\neq0$,所以 $x\neq0$,即函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.对于 A,因为 $-2<0$,所以 $f(x)=x^{-2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,故 A 错误;对于 B,令 $f(x)=4$,即 $\frac{1}{x^2}=4$,解得 $x=\pm\frac{1}{2}$,所以方程 $f(x)=4$ 的实根为 $x=\pm\frac{1}{2}$,故 B 错误;对于 C,因为 $x\neq0$,所以 $x^2>0$,所以 $f(x)=\frac{1}{x^2}>0$,所以 $f(x)$ 的值域为 $(0,+\infty)$,故 C 错误;对于 D,因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,关于原点对称,且 $f(-x)=\frac{1}{(-x)^2}=\frac{1}{x^2}=f(x)$,所以 $f(x)$ 为偶函数,故 D 正确.故选 D.

7. B 【解析】因为函数 $f(x)=(a^2-2a-2)x^a(a\in\mathbf{R})$ 为幂函数,所以 $a^2-2a-2=1$,解得 $a=3$ 或 $a=-1$,又幂函数 $f(x)=(a^2-2a-2)x^a(a\in\mathbf{R})$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,所以 $a=3$,此时 $f(x)=x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.又因为 $f(x+5)<f(x^2-3x)$,所以 $x+5<x^2-3x$,解得 $x>5$ 或 $x<-1$,所以不等式 $f(x+5)<f(x^2-3x)$ 的解集为 $(-\infty,-1)\cup(5,+\infty)$.故选 B.

8. AD 【解析】对于 A,设幂函数的解析式为 $y=x^{\alpha}$,因为该幂函数的图象经过点 $\left(\frac{1}{8},2\right)$,所以 $2=\left(\frac{1}{8}\right)^{\alpha}$,解得 $\alpha=-\frac{1}{3}$,则该幂函数的解析式为 $y=x^{-\frac{1}{3}}$,故 A 正确;对于 B,幂函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象不过点 $(0,0)$,故 B 错误;对于 C,幂函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 不具有奇偶性,故 C 错误;对于 D,任何幂函数的图象都不经过第四象限,故 D 正确.故选 AD.

9. AB 【解析】对于 A,当 $a=-1$ 时,$f(x)=x^{-1}$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调递减,但在整个定义域上不单调,故 A 中说法不正确;对于 B,当 $a=0$ 时,$f(x)=x^0$ 也是幂函数,故 B 中说法不正确;对于 C,当 $a=2$ 时,$f(x)=x^2$,其定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$,所以 $f(x)$ 是偶函数,故 C 中说法正确;对于 D,当 $a=3$ 时,$f(x)=x^3$ 单调递增,且 $f(0)=0$,所以函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴有且只有一个交点,故 D 中说法正确.故选 AB.

10. -2 【解析】幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$ 的图象过点 $(2,8)$,则 $2^{\alpha}=8$,解得 $\alpha=3$.若 $f(x_0)=-8$,则 $x_0^3=-8$,解得 $x_0=-2$.

11. 3 【解析】由题意得 $\alpha^2-\frac{7}{2}\alpha+\frac{5}{2}=1$,解得 $\alpha=\frac{1}{2}$ 或 $\alpha=3$.当 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时,$f(x)=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$ 的图象不经过第三象限,不符合题意;当 $\alpha=3$ 时,$f(x)=x^3$ 的图象经过第三象限,符合题意.故 $\alpha=3$.

12. x^{-2}(答案不唯一) 【解析】由题意可得 $f(x)=x^{-2}$ 满足②③,不满足①,符合题意.

13. 解:(1)函数 $y=x^{-5}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,因为 $5.3<5.4$,所以 $5.3^{-5}>5.4^{-5}$.

(2)$-8^{-3}=-\left(\frac{1}{8}\right)^3$,函数 $y=x^3$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,因为 $\frac{1}{8}>\frac{1}{9}$,所以 $\left(\frac{1}{8}\right)^3>\left(\frac{1}{9}\right)^3$,

所以 $-8^{-3}<-\left(\frac{1}{9}\right)^3$.

(3)$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$,$\left(-\frac{\pi}{6}\right)^{-2}=\left(\frac{\pi}{6}\right)^{-2}$,函数 $y=x^{-2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,因为 $\frac{2}{3}>\frac{\pi}{6}$,

所以 $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}<\left(\frac{\pi}{6}\right)^{-2}$,即 $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}<\left(-\frac{\pi}{6}\right)^{-2}$.

14. 解:(1)$\because f(x)=(k^2-k-1)x^k(k\in\mathbf{R})$ 为幂函数,
$\therefore k^2-k-1=1$,解得 $k=-1$ 或 $k=2$,又 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的函数图象是上升的,$\therefore k>0$,$\therefore k=2$.
(2)$\because$ 存在实数 a,b 使得函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的取值范围为 $[a,b]$,且 $f(x)=x^2$,
$\therefore \begin{cases}f(a)=a,\\f(b)=b,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a^2=a,\\b^2=b,\end{cases}$ $\because a<b$,$\therefore a=0,b=1$.

15. (1)$\sqrt{x}$ (2)$[1,2)$ 【解析】(1)因为幂函数 $f(x)=(p^2+p-1)x^{p-\frac{1}{2}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,所以 $\begin{cases}p^2+p-1=1,\\p-\frac{1}{2}>0,\end{cases}$ 解得 $p=1$,所以函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$.
(2)函数 $\varphi(x)=2\sqrt{x+1}-k$ 在 $[-1,+\infty)$ 上是增函数,若存在保值区间 $[a,b](a\geqslant-1)$,则 $\begin{cases}\varphi(a)=a,\\\varphi(b)=b,\end{cases}$ 即 $\varphi(x)=x$,也就是方程 $2\sqrt{x+1}-k=x$ 在 $[-1,+\infty)$ 上有两个不等的实根,令 $\sqrt{x+1}=t\geqslant0$,则 $x=t^2-1$,所以 $t^2-2t-1+k=0$ 在 $[0,+\infty)$ 上有两个不等的实根,令 $g(t)=t^2-2t-1+k$,则 $\begin{cases}\Delta>0,\\g(0)\geqslant0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}4-4(-1+k)>0,\\-1+k\geqslant0,\end{cases}$ 解得 $1\leqslant k<2$,故实数 k 的取值范围是 $[1,2)$.

16. 解:(1)由题意得 $m^2-2m+2=1$,且 $5k-2k^2>0,k\in\mathbf{Z}$,解得 $m=1,k=1$ 或 2,又 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,$f(x)$ 为偶函数,$\therefore k=2$,即 $f(x)=x^2$.
(2)$\because f(2x-1)<f(2-x)$,$\therefore (2x-1)^2<(2-x)^2$,解得 $-1<x<1$,即 x 的取值范围是 $(-1,1)$.
(3)由题意得 $2a+3b=7$,$\therefore 2(a+1)+3(b+1)=12$,
$\therefore \frac{a+1}{6}+\frac{b+1}{4}=1$.
$\therefore \frac{3}{a+1}+\frac{2}{b+1}=\left(\frac{a+1}{6}+\frac{b+1}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{a+1}+\frac{2}{b+1}\right)=1+\frac{3}{4}\cdot\frac{b+1}{a+1}+\frac{a+1}{3(b+1)}\geqslant1+2\sqrt{\frac{1}{4}}=2$,
当且仅当 $\frac{3}{4}\cdot\frac{b+1}{a+1}=\frac{a+1}{3(b+1)}$,即 $2a=3b+1$,即 $a=2,b=1$ 时等号成立,$\therefore \frac{3}{a+1}+\frac{2}{b+1}$ 的最小值是 2.

3.4 函数的应用（一）

1. B 【解析】设营销人员某月没有销售量时的月收入是 a 元，依题意 $\frac{a-3500}{0-1}=\frac{5000-3500}{2-1}$，解得 $a=2000$，故选 B.

2. D 【解析】y 表示“小王从出发到返回原地所经过的路程”，而不是位移.故选 D.

3. C 【解析】设 $I=kr^3(k>0)$，由已知可得当 $r=4$ 时，$I=320$，故有 $320=4^3k$，解得 $k=5$，所以 $I=5r^3$，则当 $r=3$ 时，$I=5\times3^3=135$.故选 C.

4. A 【解析】设该公司在甲地销售该产品 x 件，$x\in[0,150]$，则该公司在乙地销售该产品 $(150-x)$ 件，总利润为 L 万元，则 $L=0.506x-0.0015x^2+0.2(150-x)=-0.0015x^2+0.306x+30$，因为 $-\frac{0.306}{2\times(-0.0015)}=102$，所以当 $x=102$ 时，L 取得最大值 $-0.0015\times102^2+0.306\times102+30=45.606$，即该公司能获得的最大利润为 45.606 万元，故选 A.

5. C 【解析】设该户居民去年的用气量为 x m^3，缴纳的燃气费为 y 元，则当 $0\leqslant x\leqslant200$ 时，$y=3.2x$，令 $3.2x=868$，解得 $x=271.25$，不合题意；当 $200<x\leqslant300$ 时，$y=3.2\times200+3.8\times(x-200)=3.8x-120$，令 $3.8x-120=868$，解得 $x=260$，符合题意；当 $x>300$ 时，$y=3.2\times200+3.8\times(300-200)+4.8\times(x-300)=4.8x-420$，令 $4.8x-420=868$，解得 $x=\frac{805}{3}<300$，不合题意.综上，$x=260$.故选 C.

6. ABC 【解析】对于 A，当 $3<x<10$ 时，甲方案的费用小于乙方案的费用，故当打车里程为 8 km 时，乘客选择甲方案更省钱，所以 A 正确；对于 B，当打车里程为 10 km 时，甲、乙方案的费用均为 12 元，故乘客选择甲、乙方案均可，所以 B 正确；对于 C，当打车里程在 3 km 以上时，甲方案每千米增加的费用为 $\frac{12-5}{10-3}=1$（元），乙方案每千米增加的费用为 $\frac{12-7}{10-3}=\frac{5}{7}$（元），故甲方案每千米增加的费用比乙方案每千米增加的费用多，所以 C 正确；对于 D，由题图可知，当打车里程不超过 3 km 时，甲方案付费 5 元，当打车里程超过 3 km 时，每增加 1 km，甲方案费用增加 1 元，所以 D 错误.故选 ABC.

7. BC 【解析】对于 A，令 $f(t)=\frac{1}{25}(t-6.5)^2+\frac{1}{20}$，$t\in[5,9]$，则 $f(t)$ 在 $[5,6.5]$ 内单调递减，在 $(6.5,9]$ 内单调递增，所以 $m=\frac{1}{\frac{1}{25}(t-6.5)^2+\frac{1}{20}}+10$ 在 $[5,9]$ 内先增后减，故 A 错误；对于 B，因为 $f(t)$ 是二次函数，当 $t=6.5$ 时，$f(t)$ 取得最小值，所以 $f(6)=f(7)$，所以早上 6 时和早上 7 时通过该路口的车辆数 m 相等，故 B 正确；对于 C，因为 $f(t)$ 的最小值是 $f(6.5)=\frac{1}{20}$，所以当 $t=6.5$ 时，m 取得最大值 $20+10=30$，即在任意时刻，通过该路口的车辆数 m 不会大于 35，故 C 正确；对于 D，因为 $f(5)=\frac{1}{25}\times(5-6.5)^2+\frac{1}{20}=0.14$，$f(9)=\frac{1}{25}\times(9-6.5)^2+\frac{1}{20}=0.3$，且 $f(5)<f(9)$，所以当 $t=9$ 时，m 取得最小值 $\frac{1}{0.3}+10\approx13.3$，此时通过该路口的车辆数 m 小于 14，故 D 错误.故选 BC.

8. $y=3000-2.5x(100\leqslant x\leqslant1200)$ 【解析】由题意可知 $y=3000-2.5x$，且最少买 100 千克，最多买 $\frac{3000}{2.5}=1200$（千克），所以 x 与 y 的函数关系式为 $y=3000-2.5x(100\leqslant x\leqslant1200)$.

9. 9.6 【解析】设饼干的质量为 x 克，则其售价 y（单位：元）与 x 之间的函数解析式为 $y=(mx+n\sqrt{x})(1+0.2)$.由题意得 $1.6=(100m+\sqrt{100}n)(1+0.2)$，即 $\frac{2}{3}=50m+5n$①，$4.8=(400m+\sqrt{400}n)(1+0.2)$，即 $100m+5n=1$②.由①②解得 $m=\frac{1}{150}$，$n=\frac{1}{15}$，∴ $y=\frac{x}{125}+\frac{\sqrt{x}}{12.5}$，则当 $x=900$ 时，$y=9.6$，故该种饼干 900 克装的合理售价为 9.6 元.

10. 16 【解析】设该月的用水量为 x m^3，交纳水费 y 元，则由题可知 $y=\begin{cases}3x,0\leqslant x\leqslant12,\\36+6(x-12),12<x\leqslant18,\\72+9(x-18),x>18,\end{cases}$ 当 $y=60$ 时，可得 $x=16$.

11. 解：(1)由题意得，y 与 x 之间的函数关系式为 $y=(x-42)(-3x+204)=-3x^2+330x-8568(42<x<68,x\in\mathbf{N})$.
(2)由(1)得 $y=-3(x-55)^2+507(42<x<68,x\in\mathbf{N})$，则当 $x=55$ 时，$y_{\max}=507$，即每件的售价应定为 55 元，每天的最大销售利润为 507 元.

12. 解：(1)当 $0<x\leqslant10$ 时，$y=f(x)-4-5x=x^2+2x-4-5x=x^2-3x-4$；
当 $10<x\leqslant50$ 时，$y=f(x)-4-5x=4x-\frac{400}{x}+120-4-5x=-x-\frac{400}{x}+116$.
故 $y=\begin{cases}x^2-3x-4,0<x\leqslant10,\\-x-\frac{400}{x}+116,10<x\leqslant50.\end{cases}$
(2)当 $0<x\leqslant10$ 时，$y=x^2-3x-4=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$，
∴当 $x=10$ 时，$y_{\max}=66$；
当 $10<x\leqslant50$ 时，$y=-x-\frac{400}{x}+116=116-\left(x+\frac{400}{x}\right)\leqslant116-2\sqrt{x\cdot\frac{400}{x}}=76$，当且仅当 $x=\frac{400}{x}$，即 $x=20$ 时，等号成立，∴当 $x=20$ 时，$y_{\max}=76>66$.
综上，当代加工量为 20 万组时，该工厂代加工该款玩偶的利润最大，最大利润为 76 万元.

滚动习题（五）

1. B 【解析】由 $f(x)$ 的定义域是 $[0,2]$ 知，要使 $g(x)$ 有意义，则需 $\begin{cases}0\leqslant2x\leqslant2,\\x-1\neq0,\end{cases}$ 解得 $0\leqslant x<1$，所以 $g(x)=\frac{f(2x)}{x-1}$ 的定义域为 $[0,1)$.故选 B.

2. D 【解析】依题意，$f(-3)=f(-3+2)=f(-1)=f(-1+2)=f(1)=1+1=2$，故选 D.

3. B 【解析】对于 A 选项，函数 $f(x)=x^3$ 为奇函数，其图象关于原点对称，故 A 错误；对于 B 选项，函数 $f(x)=x^2$ 为偶函数，其图象关于 y 轴对称，且函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调

递增，故 B 正确；对于 C 选项，函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 的定义域是 $[0,+\infty)$，故函数 $f(x)$ 为非奇非偶函数，故 C 错误；对于 D 选项，函数 $f(x)=-|x|$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-x)=-|-x|=-|x|=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 为偶函数，其图象关于 y 轴对称，当 $x>0$ 时，$f(x)=-x$，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 D 错误. 故选 B.

4. C **[解析]** $f(x)=|x|^{\frac{1}{2}}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，又 $f(-x)=|-x|^{\frac{1}{2}}=|x|^{\frac{1}{2}}=f(x)$，故 $f(x)=|x|^{\frac{1}{2}}$ 为偶函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x^{\frac{1}{2}}$，结合幂函数的图象可知，C 正确. 故选 C.

5. B **[解析]** 若函数 $f(x)=\begin{cases}(a-2)x+3, x\leqslant 1,\\ \dfrac{2a}{x}, x>1\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数，则 $\begin{cases}a-2<0,\\ 2a>0,\\ a-2+3\geqslant 2a,\end{cases}$ 解得 $0<a\leqslant 1$，故选 B.

6. B **[解析]** 因为定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=3f(|x|)+x^2-2x$，所以 $f(|x|)=3f(|x|)+|x|^2-2|x|$，所以 $f(|x|)=-\frac{1}{2}|x|^2+|x|$，则 $f(x)=3\left(-\frac{1}{2}|x|^2+|x|\right)+x^2-2x=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+x, x\geqslant 0,\\ -\frac{1}{2}x^2-5x, x<0.\end{cases}$ 当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $[0,1]$，当 $x<0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-5]$. 故选 B.

7. BC **[解析]** 因为幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$ 的图象经过点 $\left(3,\frac{1}{3}\right)$，所以 $3^{\alpha}=\frac{1}{3}$，解得 $\alpha=-1$，所以 $f(x)=x^{-1}=\frac{1}{x}$，所以 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 A 错误；当 $x=1$ 时，$f(1)=1$，所以函数 $f(x)$ 的图象过点 $(1,1)$，故 B 正确；因为 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的定义域关于原点对称，且 $f(-x)=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是奇函数，故 C 正确；函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，故 D 错误. 故选 BC.

8. AC **[解析]** 由 $f(x+1)=-f(x)$，得 $f(x+2)=-f(x+1)=f(x)$，即函数 $f(x)$ 的周期为 2，又 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，所以 $f(x+2)=f(x)=f(-x)$，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，故 A 正确；对于 B，因为函数 $f(x)$ 的周期为 2，所以 $f(2024)=f(0)=-f(1)$，故 B 错误；对于 C，由 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且在 $[-1,0]$ 上单调递增，得 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，故 C 正确；对于 D，由 $f(x)$ 的周期为 2，且在 $[-1,0]$ 上单调递增，得 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}+4\right)=f\left(\frac{7}{2}\right)$，且 $f(x)$ 在 $[3,4]$ 上单调递增，又 $3<\frac{7}{2}<\frac{11}{3}<4$，所以 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{7}{2}\right)<f\left(\frac{11}{3}\right)$，故 D 错误. 故选 AC.

9. -2 **[解析]** ∵一个奇函数的定义域为 $\{a,b,2\}$，∴函数的定义域关于原点对称，∴ $a=-2, b=0$ 或 $a=0, b=-2$，∴ $a+b=-2+0=-2$.

10. 2 **[解析]** 当 $1\leqslant x\leqslant 4$ 时，$f(x)=\frac{x-1}{x^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$，由 $1\leqslant x\leqslant 4$，得 $\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{x}\leqslant 1$，所以当 $\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $\frac{1}{4}$；当 $\frac{1}{2}\leqslant x<1$ 时，$f(x)=\frac{1-x}{x^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$，由 $\frac{1}{2}\leqslant x<1$，得 $1<\frac{1}{x}\leqslant 2$，所以当 $\frac{1}{x}=2$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(2-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=2$. 综上，$f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},4\right]$ 上的最大值是 2.

11. 580 **[解析]** 设此户居民该月的用电量为 x 千瓦时，电费为 y 元，则 $y=\begin{cases}0.5x, 0\leqslant x\leqslant 240,\\ 0.6(x-240)+120, 240<x\leqslant 400,\\ 0.8(x-400)+216, x>400,\end{cases}$ 由题知 $y=360$. 当 $0\leqslant x\leqslant 240$ 时，由 $0.5x=360$，解得 $x=720$，不满足题意；当 $240<x\leqslant 400$ 时，由 $0.6(x-240)+120=360$，解得 $x=640$，不满足题意；当 $x>400$ 时，由 $0.8(x-400)+216=360$，解得 $x=580$，满足题意. 故此户居民该月的用电量为 580 千瓦时.

12. 0 偶函数 **[解析]** 由 $f(xy)=yf(x)+xf(y)$，令 $x=y=1$，得 $f(1)=f(1)+f(1)$，所以 $f(1)=0$. 令 $x=y=-1$，则 $f(1)=-f(-1)-f(-1)=0$，所以 $f(-1)=0$. 因为 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，所以 $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，令 $y=-1$，则 $f(-x)=-f(x)+xf(-1)=-f(x)$，所以 $g(-x)=\frac{f(-x)}{-x}=\frac{-f(x)}{-x}=\frac{f(x)}{x}=g(x)$，所以 $g(x)$ 为偶函数.

13. **解：**(1) $f(x)=\frac{2x^2+1}{x^2+1}=\frac{2(x^2+1)-1}{x^2+1}=2-\frac{1}{x^2+1}$，

因为 $x^2+1\geqslant 1$，所以 $0<\frac{1}{x^2+1}\leqslant 1$，

即 $-1\leqslant-\frac{1}{x^2+1}<0$，得 $1\leqslant 2-\frac{1}{x^2+1}<2$，

即函数 $f(x)$ 的值域为 $[1,2)$.

(2) $f(x)=x-\sqrt{4x+1}$，由 $4x+1\geqslant 0$，得 $x\geqslant-\frac{1}{4}$，

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $\left[-\frac{1}{4},+\infty\right)$，

令 $t=\sqrt{4x+1}$，则 $t\geqslant 0$，$x=\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{4}$，

所以 $f(x)$ 可化为 $g(t)=\frac{1}{4}t^2-t-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(t-2)^2-\frac{5}{4}$.

又函数 $g(t)=\frac{1}{4}(t-2)^2-\frac{5}{4}$ 在 $[0,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，

所以当 $t=2$ 时函数取得最小值，最小值为 $-\frac{5}{4}$，

故函数 $f(x)=x-\sqrt{4x+1}$ 的值域为 $\left[-\frac{5}{4},+\infty\right)$.

14. **解：**(1) 函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，则 $f(0)=0$，设 $x<0$，则 $-x>0$，$f(-x)=(-x)^2+a(-x)=x^2-ax$.

又函数 $f(x)$ 为奇函数，所以 $-f(x)=x^2-ax$，

即 $f(x)=-x^2+ax$,

所以函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+ax, x\geqslant 0,\\ -x^2+ax, x<0.\end{cases}$

(2)因为函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[-1,1]$,所以 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上单调递减,可得 $f(x)=x^2+ax$ 图象的对称轴方程为 $x=1$,所以 $a=-2$,

所以 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x, x\geqslant 0,\\ -x^2-2x, x<0.\end{cases}$

由 $xf(x)>0$ 得 $\begin{cases}x>0,\\ f(x)>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0,\\ f(x)<0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}x>0,\\ x^2-2x>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0,\\ -x^2-2x<0,\end{cases}$ 解得 $x>2$ 或 $x<-2$.

所以原不等式的解集为 $\{x|x<-2$ 或 $x>2\}$.

15. 解:(1)由题意知,函数 $h(x)$ 在 $(0,2]$ 上单调递减,在 $(2,+\infty)$ 上单调递增,

由 $x\in[1,3]$,可得函数 $h(x)=x+\dfrac{4}{x}$ 在区间 $[1,2]$ 上单调递减,在区间 $(2,3]$ 上单调递增.

$\because h(1)=1+4=5, h(2)=2+2=4, h(3)=3+\dfrac{4}{3}=\dfrac{13}{3}$,

$\therefore$ 当 $x\in[1,3]$ 时,$h(x)$ 的最小值为 4,最大值为 5.

(2)$f(x)=\dfrac{4x^2-12x-3}{2x+1}=2x+1+\dfrac{4}{2x+1}-8$,令 $t=2x+1, x\in[0,1]$,则 $y=t+\dfrac{4}{t}-8, t\in[1,3]$. 易知 $y=2x+1$ 是 **R** 上的增函数,根据函数 $y=t+\dfrac{4}{t}$ 的性质可得,当 $1\leqslant t\leqslant 2$,即 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时,函数 $f(x)$ 单调递减,当 $2<t\leqslant 3$,即 $\dfrac{1}{2}<x\leqslant 1$ 时,函数 $f(x)$ 单调递增,$\because f(0)=-3, f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-4$,

$f(1)=-\dfrac{11}{3}$,$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的值域为 $[-4,-3]$.

(3)$g(x)=kx-2, x\in[1,2]$.

当 $k>0$ 时,$g(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上单调递增,$\therefore g(x_2)\in[k-2,2k-2]$,$\because$ 对任意 $x_1\in[0,1]$,总存在 $x_2\in[1,2]$,使得 $f(x_1)=g(x_2)$,$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的值域为函数 $g(x)$ 值域的子集,由(2)知函数 $f(x)$ 的值域为 $[-4,-3]$,

$\therefore\begin{cases}k-2\leqslant -4,\\ 2k-2\geqslant -3,\end{cases}$ 无解;当 $k<0$ 时,$g(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上单调递减,$\therefore g(x_2)\in[2k-2,k-2]$,

$\because$ 对任意 $x_1\in[0,1]$,总存在 $x_2\in[1,2]$,使得 $f(x_1)=g(x_2)$,$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的值域为函数 $g(x)$ 值域的子集,

$\therefore\begin{cases}2k-2\leqslant -4,\\ k-2\geqslant -3,\end{cases}$ 解得 $k=-1$;当 $k=0$ 时,$g(x)=-2$,不符合题意. 综上所述,$k=-1$.

第四章　指数函数与对数函数

4.1　指数

4.1.1　n 次方根与分数指数幂

4.1.2　无理数指数幂及其运算性质

1. D **[解析]** $5^{\frac{3}{2}}=\sqrt{5^3}$. 故选 D.

2. D **[解析]** 对于 A,$8^{\frac{2}{3}}=(2^3)^{\frac{2}{3}}=2^{3\times\frac{2}{3}}=2^2=4$,故 A 错误;对于 B,$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}=2^3=8$,故 B 错误;对于 C,$\sqrt{(\pi-4)^2}=|\pi-4|=4-\pi$,故 C 错误;对于 D,$\left(\dfrac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}=\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^4\right]^{-\frac{3}{4}}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{4\times\left(-\frac{3}{4}\right)}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}=\dfrac{27}{8}$,故 D 正确. 故选 D.

3. A **[解析]** $\sqrt[3]{4}\times\sqrt{2}=4^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{1}{2}}=(2^2)^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}=2^{\frac{7}{6}}$. 故选 A.

4. D **[解析]** ①当 $2x-6\neq 1$ 时,由非零实数的 0 次幂为 1,得 $\begin{cases}x^2-5x+6=0,\\ 2x-6\neq 0,\end{cases}$ 解得 $x=2$;②当 $2x-6=1$ 时,$x=\dfrac{7}{2}$,符合题意. 综上,$x=2$ 或 $x=\dfrac{7}{2}$,故选 D.

5. D **[解析]** 由题意知 $-a\geqslant 0$,即 $a\leqslant 0$. 因为 $\sqrt{-a}=(-a)^{\frac{1}{2}}$ 且 $\sqrt[3]{a}=-\sqrt[3]{-a}=-(-a)^{\frac{1}{3}}$,所以 $\sqrt{-a}\cdot\sqrt[3]{a}=(-a)^{\frac{1}{2}}\cdot[-(-a)^{\frac{1}{3}}]=-(-a)^{\frac{1}{2}}\cdot(-a)^{\frac{1}{3}}=-(-a)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=-(-a)^{\frac{5}{6}}$,故选 D.

6. D **[解析]** $\left(2\dfrac{1}{4}\right)^{-0.5}+\sqrt[3]{27}\times 3^{-2}-(1-\pi)^0=\left(\dfrac{9}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}+3\times 3^{-2}-1=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}-1=0$. 故选 D.

7. B **[解析]** $\dfrac{\left(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}\right)\left(-2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}\right)}{\frac{1}{3}a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{6}}}=-6a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}b^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}=-6b$. 故选 B.

8. BC **[解析]** 对于 A,$(-1)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-1}=-1$,$\sqrt[6]{(-1)^2}=1$,不符合题意;对于 B,$\dfrac{1}{3^{-\frac{4}{3}}}=3^{\frac{4}{3}}$,符合题意;对于 C,$4^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{2^2}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$,符合题意;对于 D,$4^{-\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{4^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{8}$,$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}=2^3=8$,不符合题意. 故选 BC.

9. BCD **[解析]** 对于 A,令 $(4,6)=x,(2,3)=y$,则 $4^x=6$,$2^y=3$,所以 $\dfrac{4^x}{2^y}=2$,即 $2^{2x-y}=2$,所以 $2x-y=1$,即 $2\times(4,6)-(2,3)=1$,故 A 错误;对于 B,因为 $2^1=2$,所以 $(2,2)=1$,故 B 正确;对于 C,令 $(4,5)=m,(4,6)=n,(4,30)=p$,则 $4^m=5,4^n=6,4^p=30$,所以 $4^m\times 4^n=4^p$,即 $4^{m+n}=4^p$,所以 $m+n=p$,即 $(4,5)+(4,6)=(4,30)$,故 C 正确;对于 D,$a>1,b>1$,令 $(a,b)=t$,则 $a^t=b$ 且 $t>0$,所以 $a=b^{\frac{1}{t}}$,则 $(b,a)=\dfrac{1}{t}$,所以 $(a,b)+(b,a)=t+\dfrac{1}{t}\geqslant 2\sqrt{t\cdot\dfrac{1}{t}}=2$,当且仅

当 $t=\frac{1}{t}$，即 $t=1$ 时取等号，故 D 正确. 故选 BCD.

10. (1)$\frac{1}{16}$　(2)$\frac{4}{3}$　**[解析]** (1)原式$=4^{(\sqrt{7}-3)\times(\sqrt{7}+3)}=4^{7-9}=4^{-2}=\frac{1}{16}$.

(2)原式$=\left(\frac{3}{4}\right)^{3\times\left(-\frac{1}{3}\right)}=\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}=\frac{4}{3}$.

11. $\frac{47}{48}$　**[解析]** 原式$=\left(\frac{3}{2}\right)^{2\times0.5}-\left(\frac{3}{4}\right)^{2}+\frac{1}{36}\times\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\right]^{-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}-\frac{9}{16}+\frac{1}{36}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}-\frac{9}{16}+\frac{1}{24}=\frac{47}{48}$.

12. $\frac{8}{3}$　**[解析]** 因为 $10^m=4$，$10^n=\sqrt{3}$，所以 $10^{\frac{3m-4n}{2}}=\frac{(10^m)^{\frac{3}{2}}}{(10^n)^2}=\frac{4^{\frac{3}{2}}}{(\sqrt{3})^2}=\frac{2^3}{3}=\frac{8}{3}$.

13. **解**：(1)$(\sqrt{2})^0-\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}+8^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}=(\sqrt{2})^0-(3^{-1})^{-1}+(2^3)^{\frac{2}{3}}-(2^{-2})^{-\frac{1}{2}}=1-3+4-2=0$.

(2)$(8a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{3}{2}})\times(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{4}{3}})\div(-4a^{\frac{5}{6}}bc^{-\frac{1}{2}})=$
$-\frac{8}{4}a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{5}{6}}b^{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}-1}c^{\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)}=-2a^0b^1c^2=-2bc^2$.

14. **解**：(1)由题可知 $(a^x+a^{-x})^2=9$，故 $a^{2x}+a^{-2x}=7$，$\frac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}=\frac{(a^x-a^{-x})(a^{2x}+1+a^{-2x})}{a^x-a^{-x}}=a^{2x}+1+a^{-2x}=8$.

(2)由根与系数的关系得 $\sqrt{m}+\sqrt{n}=5$，$\sqrt{mn}=3$，

所以 $\frac{m\sqrt{m}-n\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}=\frac{m^{\frac{3}{2}}-n^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}}=\frac{(m^{\frac{1}{2}})^3-(n^{\frac{1}{2}})^3}{m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}}=\frac{(m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}})(m+\sqrt{mn}+n)}{m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}}=m+\sqrt{mn}+n=(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2-\sqrt{mn}=5^2-3=22$.

15. BD　**[解析]** 因为当 n 越来越大时，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 趋向于常数 e，所以当 n 越来越大时，$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}$ 趋向于常数 e，则$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n=\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}}$ 趋向于常数$\sqrt{\mathrm{e}}$，故 A 错误，B 正确；当 x 越来越大时，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 趋向于常数 e，则$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}=\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^3$ 趋向于常数 e^3，故 C 错误；当 x 越来越大时，$\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}$ 趋向于常数 e，则$\left(1+\frac{1}{3x}\right)^x=\left[\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right]^{\frac{1}{3}}$ 趋向于常数$\sqrt[3]{\mathrm{e}}$，故 D 正确. 故选 BD.

16. **解**：(1)第一次用水填满后，容器中的酒精还剩 $a-\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}a$(L)；

第二次用水填满后，容器中的酒精还剩$\frac{1}{2}a\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}a$(L)；

第三次用水填满后，容器中的酒精还剩$\frac{1}{4}a\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}a$(L)；

第四次用水填满后，容器中的酒精还剩$\frac{1}{8}a\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}a$(L).

所以连续进行 4 次，容器中的酒精还剩$\frac{1}{16}a$ L.

(2)由(1)知，第五次用水填满后，容器中的酒精还剩$\frac{1}{16}a\times\frac{1}{2}=\frac{1}{32}a$(L)……

第 n 次用水填满后，容器中的酒精还剩 $\frac{1}{2^{n-1}}a\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2^n}a$(L)，

所以连续进行 n 次，容器中的酒精还剩$\frac{1}{2^n}a$ L.

4.2　指数函数

4.2.1　指数函数的概念

1. B　**[解析]** 由指数函数的定义知，只有②符合指数函数的定义，其他均不符合，故选 B.
2. B　**[解析]** 设 $f(x)=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$，则 $a^3=8$，$\therefore a=2$，$\therefore f(x)=2^x$. 故选 B.
3. C　**[解析]** $f(0)=\mathrm{e}^0+1=2$，由 $f[f(0)]=f(2)=4-2a=-2$，解得 $a=3$. 故选 C.
4. A　**[解析]** 由题意，设 $f(x)=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$，则由 $f(2)=a^2=2$，可得 $a=\sqrt{2}$，所以 $f(x)=(\sqrt{2})^x$. 故选 A.
5. D　**[解析]** 根据题意可得 $2a=1$，$-(b+3)=0$，解得 $a=\frac{1}{2}$，$b=-3$，则 $a^b=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=8$. 故选 D.
6. A　**[解析]** $\because$不等式 $mx-n>0$ 的解集为$\{x\mid x<-2\}$，$\therefore -2m-n=0$，即 $n+2m=0$. $\because f(x)$为指数函数，$\therefore b^2+1=1$，$\therefore f(x)=a^x$，$a>0$ 且 $a\neq1$，$\therefore f(n)\cdot[f(m)]^2=a^n\cdot(a^m)^2=a^{n+2m}=a^0=1$. 故选 A.
7. D　**[解析]** 设死亡生物体内碳 14 含量的年衰减率为 p，将刚死亡生物体内碳 14 的含量看成 1 个单位，因为经过 N 年衰减为原来的一半，所以$(1-p)^N=\frac{1}{2}$，即 $1-p=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{N}}$. 若生物体内碳 14 原有初始质量为 Q，则生物体内碳 14 所剩质量 y 与死亡年数 x 的函数关系为 $y=Q(1-p)^x$，即 $y=Q\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{N}}$，故选 D.
8. AD　**[解析]** 对于 A 选项，$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 符合指数函数的定义，故是指数函数，故 A 选项正确；对于 B 选项，$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}=3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x$，$\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 前的系数为 3，不为 1，故不是指数函数，故 B 选项错误；对于 C 选项，$y=2\cdot3^x-1$，3^x 前的系数为 2，不为 1，故不是指数函数，故 C 选项错误；对于 D 选项，$y=\mathrm{e}^x$ 符合指数函数的定义，故是指数函数，故 D 选项正确. 故选 AD.
9. AC　**[解析]** 对于 A，$f(-x)=\frac{\pi^{-x}-\pi^x}{2}=-f(x)$，$g(-x)=\frac{\pi^{-x}+\pi^x}{2}=g(x)$，所以 $f(-x)+g(-x)=g(x)-$

$f(x)$,故 A 正确;对于 B,$f(x)-g(x)=\frac{\pi^x-\pi^{-x}}{2}-\frac{\pi^x+\pi^{-x}}{2}=\frac{-2\pi^{-x}}{2}=-\pi^{-x}$,故 B 不正确;对于 C,$f(2x)=\frac{\pi^{2x}-\pi^{-2x}}{2}=2\cdot\frac{\pi^x-\pi^{-x}}{2}\cdot\frac{\pi^x+\pi^{-x}}{2}=2f(x)g(x)$,故 C 正确;对于 D,$[f(x)]^2-[g(x)]^2=\left(\frac{\pi^x-\pi^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{\pi^x+\pi^{-x}}{2}\right)^2=\left(\frac{\pi^x-\pi^{-x}}{2}+\frac{\pi^x+\pi^{-x}}{2}\right)\left(\frac{\pi^x-\pi^{-x}}{2}-\frac{\pi^x+\pi^{-x}}{2}\right)=\frac{2\pi^x}{2}\cdot\frac{-2\pi^{-x}}{2}=-1$,故 D 不正确. 故选 AC.

10. -1　2　**【解析】** 根据指数函数的定义,得 $\begin{cases}k+2=1,\\2-b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=2.\end{cases}$

11. $\frac{ca^x+d}{ea^x+b}$　$a^{\frac{cx+d}{ex+b}}$　**【解析】** 因为 $f(x)=\frac{cx+d}{ex+b}$,$g(x)=a^x$ $(a>0,a\neq1)$,所以 $f[g(x)]=f(a^x)=\frac{ca^x+d}{ea^x+b}$,$g[f(x)]=g\left(\frac{cx+d}{ex+b}\right)=a^{\frac{cx+d}{ex+b}}$.

12. 40.5　**【解析】** 由题意得 $\begin{cases}96=k\cdot a,\\54=k\cdot a^3,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=\frac{3}{4},\\k=128,\end{cases}$ $\therefore y=128\times\left(\frac{3}{4}\right)^x$,$\therefore$ 该商品上架第 4 天的价格为 $128\times\left(\frac{3}{4}\right)^4=40.5$(元).

13. **解:**(1)由 $a^2+a-5=1$,解得 $a=2$ 或 $a=-3$(舍去),$\therefore f(x)=2^x$.
(2)$F(x)$为奇函数,证明如下:$\because F(x)=2^x-2^{-x}$,$x\in\mathbf{R}$,$\therefore F(-x)=2^{-x}-2^x=-F(x)$,$\therefore F(x)$是奇函数.

14. **解:**(1)设每年平改坡的百分比为 $x(0<x<1)$,则 $a(1-x)^{10}=\frac{1}{2}a$,即 $1-x=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{10}}$,解得 $x=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{10}}\approx0.067\,0=6.70\%$,故每年平改坡的百分比约为 6.70%.
(2)设到今年为止,该平改坡工程已经进行了 n 年,则 $a(1-x)^n=\frac{\sqrt{2}}{2}a$,即$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{10}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$,解得 $n=5$,所以到今年为止,该平改坡工程已经进行了 5 年.

15. $\frac{1}{5}$　**【解析】** $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{e^x+1-2}{e^x+1}=1-\frac{2}{e^x+1}$,由 $f(a+b)=\frac{5}{7}$,可得 $1-\frac{2}{e^{a+b}+1}=\frac{5}{7}$,所以 $e^{a+b}=6$. 因为 $f(a)f(b)=\frac{1}{6}$,所以 $\frac{e^a-1}{e^a+1}\cdot\frac{e^b-1}{e^b+1}=\frac{e^{a+b}-e^a-e^b+1}{e^{a+b}+e^a+e^b+1}=\frac{6-(e^a+e^b)+1}{6+(e^a+e^b)+1}=\frac{1}{6}$,解得 $e^a+e^b=5$. 又 $a>b$,所以可得 $e^a=3$,$e^b=2$,所以 $f(a-b)=1-\frac{2}{e^{a-b}+1}=1-\frac{2}{\frac{3}{2}+1}=\frac{1}{5}$.

16. **解:**(1)$\because f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$,$x\in\mathbf{R}$,$\therefore f(a)+f(1-a)=\frac{4^a}{4^a+2}+\frac{4^{1-a}}{4^{1-a}+2}=\frac{4^a}{4^a+2}+\frac{\frac{4}{4^a}}{\frac{4}{4^a}+2}=\frac{4^a}{4^a+2}+\frac{2}{2+4^a}=1$.
(2)设 $S=f\left(\frac{1}{2025}\right)+f\left(\frac{2}{2025}\right)+f\left(\frac{3}{2025}\right)+\cdots+f\left(\frac{2024}{2025}\right)$,则 $S=f\left(\frac{2024}{2025}\right)+\cdots+f\left(\frac{3}{2025}\right)+f\left(\frac{2}{2025}\right)+f\left(\frac{1}{2025}\right)$,两式相加得 $2S=\left[f\left(\frac{1}{2025}\right)+f\left(\frac{2024}{2025}\right)\right]+\left[f\left(\frac{2}{2025}\right)+f\left(\frac{2023}{2025}\right)\right]+\cdots+\left[f\left(\frac{2024}{2025}\right)+f\left(\frac{1}{2025}\right)\right]$.
由(1)得 $f\left(\frac{1}{2025}\right)+f\left(\frac{2024}{2025}\right)=1$,$f\left(\frac{2}{2025}\right)+f\left(\frac{2023}{2025}\right)=1$,…,$f\left(\frac{2024}{2025}\right)+f\left(\frac{1}{2025}\right)=1$,$\therefore 2S=2024$,解得 $S=1012$.

4.2.2　指数函数的图象和性质

第 1 课时　指数函数的图象和性质

1. B　**【解析】** 因为 $0<0.3<1$,所以指数函数 $y=0.3^x$ 是减函数,又 $0.3^m>0.3^n$,所以 $m<n$. 故选 B.

2. A　**【解析】** $c=\left(\frac{9}{4}\right)^{0.04}=\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]^{0.04}=\left(\frac{3}{2}\right)^{0.08}$,因为函数 $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,所以 $c<a<b$. 故选 A.

3. D　**【解析】** 当 $0<a<1$ 时,函数 $f(x)=a^x$ 在$[-2,2]$上单调递减,则 $f(x)_{\max}+f(x)_{\min}=f(-2)+f(2)=\frac{1}{a^2}+a^2=\frac{10}{3}$,解得 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$;当 $a>1$ 时,函数 $f(x)=a^x$ 在$[-2,2]$上单调递增,则 $f(x)_{\max}+f(x)_{\min}=f(2)+f(-2)=a^2+\frac{1}{a^2}=\frac{10}{3}$,解得 $a=\sqrt{3}$. 综上,a 的值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$或$\sqrt{3}$. 故选 D.

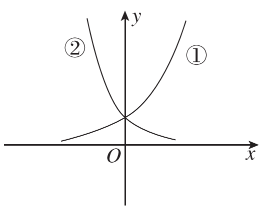
4. D　**【解析】** 由 $ab=1(a>0,b>0$ 且 $a\neq b)$,得 $b=\frac{1}{a}$,则 $g(x)=b^x=\left(\frac{1}{a}\right)^x=a^{-x}$,又 $f(x)=a^x$,所以函数 $f(x)$,$g(x)$的图象关于 y 轴对称. 故选 D.

5. A　**【解析】** $f(x)=a^{x+1}-2(a>0,a\neq1)$,令 $x+1=0$,得 $x=-1$,$f(-1)=a^0-2=-1$,所以 $f(x)$的图象过定点$(-1,-1)$,将定点$(-1,-1)$向左平移 1 个单位长度,再向上平移 1 个单位长度,得点$(-2,0)$,所以所得图象恒过定点$(-2,0)$. 故选 A.

6. C　**【解析】** 当 $a>1$ 时,$f(0)=1-a<0$,再结合指数函数的图象特征可知 $f(x)$的图象经过第一、三、四象限,所以充分性成立;若 $f(x)$的图象经过第三象限,易知当 $0<a<1$ 时,$f(x)$的图象经过第一、二、四象限,不经过第三象限,所以 $a>1$,且 $f(0)=1-a<0$,解得 $a>1$,所以必要性成立. 故选 C.

7. B　**【解析】** 函数 $y=x+a$ 是增函数,排除 C;由 $a>1$ 得 $0<\frac{1}{a}<1$,故函数 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ 是减函数,排除 A;直线 $y=x+a$ 与 y 轴的交点为$(0,a)$,$a>1$,排除 D. 故选 B.

8. AD 【解析】根据指数函数的图象和性质知，当 $a>b>1$ 时，它们的图象可能为 A 中图象；当 $1>a>b>0$ 时，它们的图象可能为 D 中图象；当 $a>1>b>0$ 时，它们的图象可能如图所示. 故选 AD.



9. BD 【解析】根据题意，由指数函数的性质可知，当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)=a^x+2a-2$ 单调递减，且 $f(0)=1+2a-2=2a-1<1$，若 $a=\frac{1}{2}$，则函数图象过坐标原点，此时图象可能为 D；当 $a>1$ 时，函数 $f(x)=a^x+2a-2$ 单调递增，且 $f(0)=1+2a-2=2a-1>1$，此时 $f(x)$ 的图象交 y 轴于正半轴，函数图象可能为 B. 故选 BD.

10. (1)< (2)< (3)> (4)> 【解析】(1)∵$\sqrt{3}>1$，∴指数函数 $y=(\sqrt{3})^x$ 是增函数. ∵$0.2<\frac{2}{5}$，∴$(\sqrt{3})^{0.2}<(\sqrt{3})^{\frac{2}{5}}$.

(2)∵$0<\frac{3}{4}<1$，∴指数函数 $y=\left(\frac{3}{4}\right)^x$ 是减函数.

∵$-0.6>-\frac{3}{4}$，∴$\left(\frac{3}{4}\right)^{-0.6}<\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{3}{4}}$.

(3)$\left(\frac{4}{5}\right)^{-\frac{1}{3}}=\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$，∵$\frac{5}{4}>1$，∴指数函数 $y=\left(\frac{5}{4}\right)^x$ 是增函数. ∵$\frac{1}{3}>0.3$，∴$\left(\frac{4}{5}\right)^{-\frac{1}{3}}>\left(\frac{5}{4}\right)^{0.3}$.

(4)$1.5^{-0.2}=\left(\frac{2}{3}\right)^{0.2}$，∵$0<\frac{2}{3}<1$，∴指数函数 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ 是减函数. ∵$0.2<\frac{1}{3}$，∴$1.5^{-0.2}>\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$.

11. (1,4) 【解析】令 $x-1=0$，得 $x=1$，则 $y=4$，所以函数 $y=a^{x-1}+3(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的图象恒过定点 $(1,4)$.

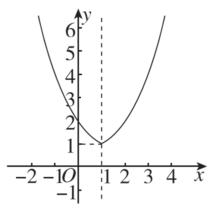
12. 2^{-x}(答案不唯一) 【解析】由函数 $f(x)$ 满足：①$f(x)$ 单调递减，②$f(0)=1$，③$f(x+y)=f(x)f(y)$，可知 $f(x)=2^{-x}$ 符合上述条件.

13. 解：(1)因为指数函数 $f(x)=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$ 的图象过点 $(-2,9)$，所以 $a^{-2}=9$，解得 $a=\frac{1}{3}$，所以函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

(2)由(1)知函数 $f(x)$ 在 **R** 上单调递减，
由 $f(2m-1)-f(m+3)<0$ 得 $f(2m-1)<f(m+3)$，
所以 $2m-1>m+3$，解得 $m>4$，
所以实数 m 的取值范围是 $(4,+\infty)$.

14. 解：(1)若函数 $f(x)=a^{x-1}$ 的图象经过点 $P(3,4)$，
则 $a^{3-1}=4$，可得 $a=2$.
(2)若 $a>1$，则 $f(x)$ 是增函数，$f(x)$ 在区间 $[2,3]$ 上的最大值为 $f(3)=a^2$，最小值为 $f(2)=a$，则 $a^2-a=\frac{a}{2}$，解得 $a=\frac{3}{2}$ 或 $a=0$(舍去).
若 $0<a<1$，则 $f(x)$ 是减函数，$f(x)$ 在区间 $[2,3]$ 上的最大值为 $f(2)=a$，最小值为 $f(3)=a^2$，则 $a-a^2=\frac{a}{2}$，解得 $a=\frac{1}{2}$ 或 $a=0$(舍去).
综上，a 的值为 $\frac{3}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$.

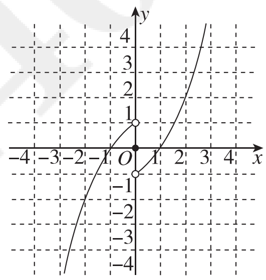
15. CD 【解析】画出 $f(x)=2^{|x-1|}$ 的图象，如图所示. 对于 A，根据 $f(x)$ 的图象可知，函数 $f(x)$ 的值域为 $[1,+\infty)$，A 错误；对于 B，根据 $f(x)$ 的图象可知，函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1)$ 上单调递减，在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，B 错误；对于 C，根据 $f(x)$ 的图象可知，函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，C 正确；对于 D，因为 $y=-a^2\leqslant0$，所以函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=-a^2(a\in\mathbf{R})$ 不可能有交点，D 正确. 故选 CD.



16. 解：(1)∵$y=f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，∴$f(0)=0$.
当 $x<0$ 时，$-x>0$，∴$f(x)=-f(-x)=-2^{-x}+2$，

$$\therefore f(x)=\begin{cases}2^x-2, x>0,\\0, x=0,\\-2^{-x}+2, x<0.\end{cases}$$

(2)画出 $f(x)$ 的图象，如图所示.
由图可知，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$.



(3)由 $f(x)+k=3$，得 $f(x)=-k+3$，
∴方程 $f(x)+k=3$ 有 2 个实根等价于函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=3-k$ 有两个交点，∴$-1<3-k<1$ 且 $3-k\neq0$，
∴$2<k<4$ 且 $k\neq3$，故 k 的取值范围为 $(2,3)\cup(3,4)$.

第 2 课时　指数函数的图象及其性质的应用

1. C 【解析】由题意可知 $\begin{cases}2-x\geqslant0,\\2^x-1\neq0,\end{cases}$ 解得 $x\leqslant2$ 且 $x\neq0$. 故选 C.

2. A 【解析】函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x-8}$ 的定义域为 **R**，函数 $u=x^2-2x-8$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，而函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^u$ 在 **R** 上单调递减，因此函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x-8}$ 的单调递增区间是 $(-\infty,1)$. 故选 A.

3. A 【解析】∵$x\geqslant0$，∴$-x\leqslant0$，∴$3-x\leqslant3$，∴$0<2^{3-x}\leqslant2^3=8$，∴$0\leqslant8-2^{3-x}<8$，∴函数 $y=8-2^{3-x}$ 的值域为 $[0,8)$. 故选 A.

4. A 【解析】因为 $a^2+a+2=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>1$，所以函数 $y=(a^2+a+2)^t$ 是增函数，所以 $2x>3-x$，解得 $x>1$. 故选 A.

5. A 【解析】$f(x)=4^x-\left(\frac{1}{4}\right)^x=4^x-4^{-x}$ 的定义域为 **R**，又

$f(-x)=4^{-x}-4^{x}=-f(x)$,所以 $f(x)$ 是奇函数.因为 $y=4^{x}$ 在 **R** 上是增函数,$y=-4^{-x}$ 在 **R** 上是增函数,所以 $f(x)$ 在 **R** 上是增函数.故选 A.

6. D 【解析】根据题意,当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=2^{x}-4$,令 $f(x)=2^{x}-4>0$,解得 $x>2$.∵$f(x)$ 是定义在 **R** 上的偶函数,∴其图象关于 y 轴对称,∴不等式 $f(x)>0$ 在 **R** 上的解集为 $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$,因此,不等式 $f(x-2)>0$ 等价于 $x-2\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$,解得 $x\in(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$,故选 D.

7. B 【解析】原不等式可化为 $2^{x}-5^{-x}\leqslant 2^{-y}-5^{y}$,设函数 $f(x)=2^{x}-5^{-x}$,则原不等式可化为 $f(x)\leqslant f(-y)$.因为函数 $f(x)$ 在 **R** 上单调递增,所以 $x\leqslant -y$,即 $x+y\leqslant 0$.故选 B.

8. ABD 【解析】函数 $f(x)=m+\frac{2^{x+1}}{2^{x}+1}$ 的定义域为 **R**,又 $f(x)$ 是奇函数,所以 $f(0)=m+\frac{2}{2}=m+1=0$,故 $m=-1$,故 A 正确.$f(x)=-1+\frac{2^{x+1}}{2^{x}+1}=-1+\frac{2(2^{x}+1)-2}{2^{x}+1}=-1+2-\frac{2}{2^{x}+1}=1-\frac{2}{2^{x}+1}$,因为函数 $t=2^{x}+1$,$t>1$ 在 **R** 上单调递增,函数 $y=-\frac{1}{t}$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,所以函数 $f(x)$ 在 **R** 上单调递增,则对任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$,且 $x_1\neq x_2$,恒有 $(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0$,故 B 正确.因为 $f(x)$ 在 $[-2,1)$ 上单调递增,$f(-2)=-\frac{3}{5}$,$f(1)=\frac{1}{3}$,所以函数 $f(x)$ 在 $[-2,1)$ 上的取值范围为 $\left[-\frac{3}{5},\frac{1}{3}\right)$,故 C 错误.若对任意 $x\in\mathbf{R}$,恒有 $f(2x-1)<f(ax^{2}-2x)$ 成立,则 $2x-1<ax^{2}-2x$ 恒成立,即 $ax^{2}-4x+1>0$ 的解集为 **R**,当 $a=0$ 时,不等式的解集为 $x<\frac{1}{4}$,不符合题意;当 $a\neq 0$ 时,要使得不等式的解集为 **R**,则有 $\begin{cases}a>0,\\ \Delta=(-4)^{2}-4a<0,\end{cases}$ 解得 $a>4$.综上,$a>4$,则对任意 $x\in\mathbf{R}$,$f(2x-1)<f(ax^{2}-2x)$ 恒成立的一个充分不必要条件是 $a>6$,故 D 正确.故选 ABD.

9. ACD 【解析】对于 A,$f(x)$ 的定义域为 **R**,若 $f(x)$ 是偶函数,则 $f(-x)=f(x)$,即 $\mathrm{e}^{-x^{2}+2ax}=\mathrm{e}^{-x^{2}-2ax}$,可得 $-x^{2}+2ax=-x^{2}-2ax$,解得 $a=0$,故 A 正确;对于 B,不能确定 a 的值,则不能求出函数 $f(x)$ 的值域,故 B 错误;对于 C,$f(x)=\mathrm{e}^{-x^{2}-2ax}$,设 $t=-x^{2}-2ax$,则 $t=-x^{2}-2ax=-(x+a)^{2}+a^{2}$ 在区间 $[-a,+\infty)$ 上单调递减,又 $y=\mathrm{e}^{t}$ 在 **R** 上单调递增,所以 $f(x)$ 在 $[-a,+\infty)$ 上单调递减,故 C 正确;对于 D,$f(x)=\mathrm{e}^{-(x+a)^{2}+a^{2}}$,当 $a\in(0,1)$ 时,$f(x)$ 的图象与 $y=a$ 的图象有两个交点,所以方程 $f(x)-a=0$ 有两个实数根,故 D 正确.故选 ACD.

10. $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup(2,+\infty)$ 【解析】当 $x\geqslant 0$ 时,由 $2^{x}>4$,解得 $x>2$,此时 $x>2$;当 $x<0$ 时,由 $-2x+1>4$,解得 $x<-\frac{3}{2}$,此时 $x<-\frac{3}{2}$.故不等式的解集为 $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup(2,+\infty)$.

11. $(-\infty,0]$ 【解析】$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{x},x>0,\\ 2^{x},x\leqslant 0,\end{cases}$ 所以函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ 的单调递增区间是 $(-\infty,0]$.

12. $(-\infty,1]$ 【解析】设 $t=x^{2}-2ax$,则其图象开口向上,对称轴方程为 $x=a$,而 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{t}$ 在 **R** 上单调递减,则若 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^{2}-2ax}$ 在 $[1,3]$ 上单调递减,则 $t=x^{2}-2ax$ 在 $[1,3]$ 上单调递增,所以 $a\leqslant 1$,故实数 a 的取值范围为 $(-\infty,1]$.

13. **解:**当 $a>1$ 时,∵$y=a^{x}$ 是 **R** 上的增函数,∴$2x-3>5x-1$,解得 $x<-\frac{2}{3}$;

当 $0<a<1$ 时,∵$y=a^{x}$ 是 **R** 上的减函数,∴$2x-3<5x-1$,解得 $x>-\frac{2}{3}$.

综上,当 $a>1$ 时,不等式的解集为 $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$,

当 $0<a<1$ 时,不等式的解集为 $\left(-\frac{2}{3},+\infty\right)$.

14. **解:**(1)由题意可得,函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**.

(2)令 $t=-x^{2}+6x-5$,则 $t=-(x-3)^{2}+4$ 在 $(-\infty,3)$ 上单调递增,在 $(3,+\infty)$ 上单调递减,

又函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{t}$ 是减函数,所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(3,+\infty)$,单调递减区间为 $(-\infty,3)$.

(3)由(2)中结论可知,$f(x)\geqslant f(3)=\frac{1}{16}$,

故函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[\frac{1}{16},+\infty\right)$.

15. C 【解析】因为 $\begin{cases}(x-2)^{2023}+2023x=4045,\\ (y-2)^{2023}+2023y=4047,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}(x-2)^{2023}+2023(x-2)=-1,\\ (y-2)^{2023}+2023(y-2)=1,\end{cases}$ 令 $f(t)=t^{2023}+2023t$,因为函数 $y=t^{2023}$,$y=2023t$ 在 **R** 上都为增函数,所以 $f(t)=t^{2023}+2023t$ 在 **R** 上都为增函数,又 $t\in\mathbf{R}$ 时,$f(-t)=-t^{2023}-2023t=-f(t)$,所以 $f(t)=t^{2023}+2023t$ 为奇函数,所以 $f(x-2)=-f(2-x)=-1$,所以 $f(2-x)=1$,又 $f(y-2)=1$,所以 $f(2-x)=f(y-2)$,可得 $2-x=y-2$,即 $x+y=4$.故选 C.

16. **解:**(1)$f(x)$ 的定义域为 **R**,因为 $f(x)=\frac{4^{x}+a}{2^{x}}$,所以

$f(-x)=\frac{4^{-x}+a}{2^{-x}}=\frac{1+a\cdot 4^{x}}{2^{x}}$,

又 $f(x)$ 为偶函数,所以 $f(-x)=f(x)$,解得 $a=1$,

则 $f(x)=\frac{4^{x}+1}{2^{x}}=2^{x}+\frac{1}{2^{x}}$.

由对勾函数的性质知,

当 $2^{x}\in(0,1)$,即 $x\in(-\infty,0)$ 时,函数 $f(x)$ 单调递减,当 $2^{x}\in(1,+\infty)$,即 $x\in(0,+\infty)$ 时,函数 $f(x)$ 单调递增,

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减,在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

(2)由题意可得存在 $x\in[0,1]$ 使不等式 $b\left(2^{2x}+\frac{1}{2^{2x}}\right)+1\geqslant 2^x+\frac{1}{2^x}$,

即 $b\left[\left(2^x+\frac{1}{2^x}\right)^2-2\right]+1\geqslant 2^x+\frac{1}{2^x}$ 成立,

令 $t=2^x+\frac{1}{2^x}$,则 $t\in\left[2,\frac{5}{2}\right]$,

所以 $b(t^2-2)+1\geqslant t$ 有解.

由 $b(t^2-2)+1\geqslant t$,得 $b\geqslant\frac{t-1}{t^2-2}$,

令 $g(t)=\frac{t-1}{t^2-2}$,$t\in\left[2,\frac{5}{2}\right]$,

则 $b\geqslant g(t)_{\min}$,$g(t)=\frac{t-1}{t^2-2}=\frac{t-1}{(t-1)^2+2(t-1)-1}=\frac{1}{(t-1)-\frac{1}{t-1}+2}\geqslant\frac{6}{17}$,所以 $b\geqslant\frac{6}{17}$,

故实数 b 的取值范围为 $\left[\frac{6}{17},+\infty\right)$.

滚动习题(六)

1. A 【解析】由 $f(2)=4$ 得 $a^2=4$,又 $a>0$,且 $a\neq1$,所以 $a=2$,即 $f(x)=2^x$. 故选 A.

2. A 【解析】因为函数 $y=0.4^x$ 在 **R** 上为减函数,所以 $1=0.4^0>0.4^{0.2}>0.4^{0.6}$,又因为 $a=2^{0.2}>2^0=1$,所以 $a>b>c$. 故选 A.

3. C 【解析】∵函数 $y=(m^2-2m-2)\cdot m^x$ 是指数函数,

∴$\begin{cases}m^2-2m-2=1,\\m>0,\\m\neq1,\end{cases}$ 解得 $m=3$,故选 C.

4. D 【解析】当 $0<a<1$ 时,$y=a^x$ 在 $[1,2]$ 上单调递减,所以 $a-a^2=\frac{a}{2}$,解得 $a=\frac{1}{2}$ 或 $a=0$(舍去);当 $a>1$ 时,$y=a^x$ 在 $[1,2]$ 上单调递增,所以 $a^2-a=\frac{a}{2}$,解得 $a=\frac{3}{2}$ 或 $a=0$(舍去). 综上所述,$a=\frac{1}{2}$ 或 $a=\frac{3}{2}$. 故选 D.

5. C 【解析】易知 $y=x+a$ 是增函数,排除 A;当 $0<a<1$ 时,$y=a^x$ 是减函数,其图象过定点 $(0,1)$,$y=x+a$ 的图象与 y 轴的交点位于点 $(0,1)$ 的下方,点 $(0,0)$ 的上方,排除 B;当 $a>1$ 时,$y=a^x$ 是增函数,其图象过定点 $(0,1)$,$y=x+a$ 的图象与 y 轴的交点位于点 $(0,1)$ 上方,排除 D. 故选 C.

6. A 【解析】当 $x\leqslant2$ 时,函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-\frac{5}{4}$ 单调递减,$f(x)$ 的最小值为 $f(2)=-1$;当 $x>2$ 时,当 $a=0$ 时,函数 $f(x)=2x-1$ 单调递增,不符合题意;当 $a\neq0$ 时,因为 $f(x)$ 是 **R** 上的减函数,所以 $f(x)=ax^2+2x-1$ 的图象开口向下,即 $a<0$,其图象的对称轴方程为 $x=-\frac{1}{a}$,则 $\begin{cases}a<0,\\-\frac{1}{a}\leqslant2,\\a\times2^2+2\times2-1\leqslant-1,\end{cases}$ 解得 $a\leqslant-1$. 故选 A.

7. BCD 【解析】对于 A,$\left(\frac{n}{m}\right)^7=\frac{n^7}{m^7}=n^7m^{-7}(n>0,m>0)$,故 A 错误;对于 B,$-\sqrt[12]{3^2}=-3^{\frac{2}{12}}=-3^{\frac{1}{6}}=-\sqrt[6]{3}$,故 B 正确;对于 C,$\sqrt{\sqrt[3]{9}}=\sqrt{\sqrt[3]{3^2}}=\sqrt{3^{\frac{2}{3}}}=(3^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{3}$,故 C 正确;对于 D,$[(a^{-3})^2(b^{-2})^3]^{\frac{1}{3}}=(a^{-6}b^{-6})^{\frac{1}{3}}=a^{-2}b^{-2}(a>0,b>0)$,故 D 正确. 故选 BCD.

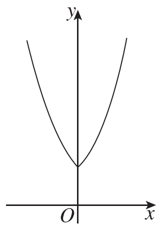
8. ACD 【解析】对于选项 A,令 $t=5$,可得 $y=3\times2^5=96>90$,所以在计算机开机后使用 5 分钟时,该计算机病毒占据内存会超过 90 KB,故 A 正确;对于选项 B,因为 $3\times2^{t+1}-3\times2^t=3\times2^t$ 不是定值,可知计算机开机后,该计算机病毒每分钟增加的内存不相等,故 B 错误;对于选项 C,因为 $\frac{3\times2^{t+1}-3\times2^t}{3\times2^t}=1$,所以计算机开机后,该计算机病毒每分钟的增长率为 1,故 C 正确;对于选项 D,由题意可得 $\begin{cases}3\times2^{t_1}=6,\\3\times2^{t_2}=9,\\3\times2^{t_3}=18,\end{cases}$ 可得 $(3\times2^{t_1})\times(3\times2^{t_2})=3(3\times2^{t_3})$,所以 $2^{t_1+t_2}=2^{t_3}$,即 $t_1+t_2=t_3$,故 D 正确. 故选 ACD.

9. 1 【解析】因为函数 $f(x)=2a^{x+m}+n(a>0$,且 $a\neq1)$ 的图象恒过点 $(1,4)$,所以 $\begin{cases}1+m=0,\\2a^0+n=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=-1,\\n=2,\end{cases}$ 所以 $m+n=1$.

10. 256 【解析】因为每 15 分钟分裂一次,所以两个小时共分裂 8 次. 1 个这样的细胞经过一次分裂后,由 1 个分裂成 2 个,所以经过 8 次分裂后,1 个这样的细胞可以分裂成 $2^8=256$(个).

11. $(-1,+\infty)$ $(1,17]$ 【解析】设 $g(x)=-x^2-2x+3$,则 $g(x)$ 的图象开口向下,对称轴方程为 $x=-\frac{-2}{2\times(-1)}=-1$,所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增,在 $(-1,+\infty)$ 上单调递减. 又函数 $y=2^t+1$ 在 **R** 上单调递增,故 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1,+\infty)$. 因为 $g(x)_{\max}=g(-1)=-1+2+3=4$,所以 $g(x)\leqslant4$,所以 $1<f(x)\leqslant2^4+1$,故 $f(x)$ 的值域为 $(1,17]$.

12. $3^{|x|}$(答案不唯一) 【解析】设 $f(x)=3^{|x|}$,当 $x>0$,$y>0$ 时,$f(x+y)=3^{|x+y|}=3^{|x|}\times3^{|y|}=f(x)\cdot f(y)$,故满足①. $f(x)$ 的图象如图,故满足②. 当 $a>b>0$ 时,$a-b>0$,由指数函数的性质可知 $f(a)-f(b)>0$,故 $[f(a)-f(b)](a-b)>0$,当 $0<a<b$ 时,$a-b<0$,由指数函数的性质可知 $f(a)-f(b)<0$,故 $[f(a)-f(b)](a-b)>0$. 故满足③. 故答案为 $3^{|x|}$(答案不唯一).



13. 解:(1)由题意 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3$,

所以 $a+a^{-1}=\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^2-2=3^2-2=7$.

(2)由题意 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3$,所以 $\frac{a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}-3}{a^2+a^{-2}-2}=\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)\left(a-a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}+a^{-1}\right)-3}{(a+a^{-1})^2-4}=\frac{3\times(7-1)-3}{7^2-4}=$

$\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$.

14. **解**：$f(x)=\frac{(2e^x+1)^2}{4e^x}=\frac{4e^{2x}+4e^x+1}{4e^x}=e^x+\frac{1}{4e^x}+1$，$x\in[0,+\infty)$，令 $e^x=t$，$t\geqslant 1$，设 $g(t)=t+\frac{1}{4t}+1$，

设 $t_1>t_2\geqslant 1$，则 $g(t_1)-g(t_2)=t_1+\frac{1}{4t_1}-t_2-\frac{1}{4t_2}=(t_1-t_2)\left(1-\frac{1}{4t_1t_2}\right)$，

因为 $t_1>t_2\geqslant 1$，所以 $t_1-t_2>0$，$t_1t_2>1$，$1-\frac{1}{4t_1t_2}>0$，

即 $g(t_1)-g(t_2)>0$，$g(t_1)>g(t_2)$，

所以函数 $g(t)$在$[1,+\infty)$上单调递增，

又 $t=e^x$ 在$[0,+\infty)$上单调递增，

所以函数 $f(x)=\frac{(2e^x+1)^2}{4e^x}$在$[0,+\infty)$上单调递增，

又 $f(0)=\frac{9}{4}$，所以函数的值域为$\left[\frac{9}{4},+\infty\right)$.

15. **解**：(1)由题意可知 $f(0)=a+b=2$ 且 $b=3$，所以 $a=-1$，故函数 $f(x)$的解析式为 $f(x)=-2^x+3$.

(2)由(1)可知不等式 $f(x)>2^{4-x}-7$ 即为 $-2^x+3>2^{4-x}-7$，

即为$(2^x)^2-10\cdot 2^x+16<0$，解得 $2<2^x<8$，

所以 $1<x<3$，所以原不等式的解集为$\{x|1<x<3\}$.

(3)由(1)可知不等式 $f(2x)+f(x)-m\leqslant 0$ 可化为 $m\geqslant-(2^x)^2-2^x+6$，

由题意可知 $m\geqslant-(2^x)^2-2^x+6$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，

即 $m\geqslant[-(2^x)^2-2^x+6]_{\max}$. 令 $2^x=t(t>0)$，

$g(t)=-t^2-t+6=-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{4}(t>0)$，

则 $g(t)<g(0)=6$，所以 $m\geqslant 6$，

故实数 m 的最小值为 6.

4.3 对数

4.3.1 对数的概念

1. A **[解析]** 因为 $2^x=3$，所以 $x=\log_2 3$，故选 A.

2. B **[解析]** $\because\log_2(a+1)=1$，$\therefore a+1=2$，解得 $a=1$，故选 B.

3. B **[解析]** 由 $\log_{(a+1)}\frac{2}{4-a}$有意义可知$\begin{cases}a+1>0,\\a+1\neq 1,\\\frac{2}{4-a}>0,\end{cases}$解得$-1<a<4$ 且 $a\neq 0$，所以 a 的取值范围为$(-1,0)\cup(0,4)$. 故选 B.

4. B **[解析]** 设 $\ln\sqrt{e}=x$，则 $e^x=\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}$，$\therefore x=\frac{1}{2}$. 故选 B.

5. B **[解析]** 对于 A，由于 $\log_5 1=0$，而 0 和负数没有对数，则 $\lg(\log_5 1)$无意义，A 错误；对于 B，$\log_3(\log_2 2)=\log_3 1=0$，B 正确；对于 C，由 $\ln x=e$，得 $x=e^e$，C 错误；对于 D，由 $\lg x=10$，得 $x=10^{10}$，D 错误. 故选 B.

6. C **[解析]** 原式$=0-2+2\times 2^{\log_2 3}=-2+2\times 3=4$. 故选 C.

7. A **[解析]** 因为 $\log_4\frac{4}{3}=y$，所以 $4^y=2^{2y}=\frac{4}{3}$，又因为 $2^x=6$，所以 $2^{x+2y}=2^x\cdot 2^{2y}=6\times\frac{4}{3}=8=2^3$，即 $x+2y=3$. 故选 A.

8. ACD **[解析]** 将指数式 $e^0=1$ 化成对数式为 $\ln 1=0$，故 A 正确；将指数式 $4^{\frac{1}{2}}=2$ 化成对数式为 $\log_4 2=\frac{1}{2}$，故 B 错误；将指数式 $25^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{5}$化成对数式为 $\log_{25}\frac{1}{5}=-\frac{1}{2}$，故 C 正确；将指数式 $3^1=3$ 化成对数式为 $\log_3 3=1$，故 D 正确. 故选 ACD.

9. AD **[解析]** 对于 A，$\lg 10=1$，$\lg(\lg 10)=\lg 1=0$，故 A 正确；对于 B，$10=\lg x$，则 $x=10^{10}$，故 B 错误；对于 C，$\log_{25}x=\frac{1}{2}$，则 $x=25^{\frac{1}{2}}=5$，故 C 错误；对于 D，$2^{4+\log_2 5}=2^4\times 2^{\log_2 5}=16\times 5=80$，故 D 正确. 故选 AD.

10. $\frac{4}{5}$ **[解析]** 原式$=\frac{2^2}{2^{\log_2 5}}+3+0-3+0=\frac{4}{5}$.

11. $\frac{1}{8}$ **[解析]** $\because 3^{\log_2 x}=\frac{1}{27}=3^{-3}$，$\therefore\log_2 x=-3$，$\therefore x=2^{-3}=\frac{1}{8}$.

12. 36 **[解析]** 由 $\log_a 3=x$，$\log_a 4=y$，得 $a^x=3$，$a^y=4$，所以 $a^{2x+y}=a^{2x}\cdot a^y=9\times 4=36$.

13. **解**：(1)$\log_2 16=4$. (2)$\log_{\frac{1}{2}}0.45=b$.

(3)$5^3=125$. (4)$10^{-1.5}=a$.

14. **解**：(1)①由 $\log_x 27=\frac{3}{2}$，得 $x^{\frac{3}{2}}=27$，

所以 $x=27^{\frac{2}{3}}=(3^3)^{\frac{2}{3}}=9$.

②因为 $\log_5(\log_2 x)=0$，所以 $\log_2 x=1$，所以 $x=2$.

(2)因为 $a=\log_2 3$，所以 $2^a=3$，

又 $2^b=5$，所以 $2^{a-2b}=2^a\div(2^b)^2=3\div 5^2=\frac{3}{25}$.

(3)由 $x=\log_2 3$，得 $2^x=3$，则 $2^{-x}=\frac{1}{3}$，

所以$\frac{2^{3x}-2^{-3x}}{2^x-2^{-x}}=\frac{3^3-\left(\frac{1}{3}\right)^3}{3-\frac{1}{3}}=\frac{91}{9}$.

15. C **[解析]** 因为 $\lg 3\approx 0.477\ 1$，所以 $\lg 3^{100}=100\lg 3\approx 100\times 0.477\ 1=47.71=47+0.71$，所以 3^{100} 是 48 位数. 故选 C.

16. **证明**：设 $\log_a b=\log_b a=k$，

则 $b=a^k$，$a=b^k$，$\therefore b=(b^k)^k=b^{k^2}$.

$\because b>0$，且 $b\neq 1$，$\therefore k^2=1$，即 $k=\pm 1$.

当 $k=1$ 时，$a=b$；当 $k=-1$ 时，$a=\frac{1}{b}$.

故 $a=b$ 或 $a=\frac{1}{b}$.

4.3.2 对数的运算

1. B **[解析]** $\lg 5+\lg 20=\lg 100=2$. 故选 B.

2. B **[解析]** 原式$=\log_3 9=\log_3 3^2=2\log_3 3=2$.

3. A **[解析]** 因为 $3^m=2$，所以 $m=\log_3 2$，所以 $m\log_4 3=\log_3 2\cdot\log_4 3=\log_3 2\cdot\frac{\log_2 3}{\log_2 4}=\frac{1}{2}$. 故选 A.

4. C **[解析]** $\lg 4+\lg\frac{5}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=\lg\left(4\times\frac{5}{2}\right)-2=\lg 10-2=1-2=-1$. 故选 C.

5. D 【解析】由对数的运算性质可知 $\frac{1}{\log_3 t}+\frac{1}{\log_4 t}=\frac{1}{2}$，即 $\log_t 3+\log_t 4=\frac{1}{2}$，可得 $\log_t 12=\frac{1}{2}$，所以 $t=144$. 故选 D.

6. C 【解析】$\because 4\uparrow\uparrow 3=4\uparrow 4\uparrow 4=4\uparrow(4\uparrow 4)=4\uparrow 4^4=4\uparrow 256=4^{256}$，$\therefore \frac{4\uparrow\uparrow 3}{T}=\frac{4^{256}}{10^{82}}$，取常用对数得 $\lg\frac{4^{256}}{10^{82}}=512\lg 2-82\approx 512\times 0.3-82=71.6$，$\therefore \frac{4^{256}}{10^{82}}\approx 10^{71.6}$，故最接近的是 10^{71}. 故选 C.

7. D 【解析】令 $3^a=6^b=24^c=m$，$m>0$ 且 $m\neq 1$，则 $a=\log_3 m$，$b=\log_6 m$，$c=\log_{24} m$，所以 $\frac{1}{a}=\log_m 3$，$\frac{1}{b}=\log_m 6$，$\frac{1}{c}=\log_m 24$. 对于 A，$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\log_m 3+\log_m 24=\log_m 72\neq\log_m 6=\frac{1}{b}$，故 A 错误；对于 B，$\frac{1}{a}+\frac{2}{c}=\log_m 3+\log_m 24^2=\log_m 1728\neq\log_m 6^3=\frac{3}{b}$，故 B 错误；对于 C，$\frac{2}{a}+\frac{3}{c}=\log_m 9+\log_m 24^3=\log_m 124\ 416\neq\log_m 6=\frac{1}{b}$，故 C 错误；对于 D，$\frac{2}{a}+\frac{1}{c}=\log_m 9+\log_m 24=\log_m 216=\log_m 6^3=3\log_m 6=\frac{3}{b}$，故 D 正确. 故选 D.

8. BCD 【解析】由 $\log_5 3\times\log_3 2\times\log_2 5=\frac{\lg 3}{\lg 5}\times\frac{\lg 2}{\lg 3}\times\frac{\lg 5}{\lg 2}=1$，$\lg\sqrt{2}+\frac{1}{2}\lg 5=\lg\sqrt{2}+\lg\sqrt{5}=\lg\sqrt{10}=\frac{1}{2}$，$\log_{\sqrt{a}} a^2=\frac{\lg a^2}{\lg\sqrt{a}}=\frac{2\lg a}{\frac{1}{2}\lg a}=4$，$e^{\ln 3}-(0.125)^{-\frac{2}{3}}=3-(2^{-3})^{-\frac{2}{3}}=3-4=-1$，可知只有 A 中式子化简结果为 1，故选 BCD.

9. ACD 【解析】对于 A，由 $\lg 3=m$，$\lg 2=n$，得 $\log_5 18=\frac{\lg 18}{\lg 5}=\frac{\lg 9+\lg 2}{1-\lg 2}=\frac{2\lg 3+\lg 2}{1-\lg 2}=\frac{2m+n}{1-n}$，故 A 正确；对于 B，由 $a+a^{-1}=14$，得 $a>0$，所以 $\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^2=a+a^{-1}+2=16$，得 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=4$，故 B 错误；对于 C，$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}-2\ln(\ln e^e)=9-2\ln e=9-2=7$，故 C 正确；对于 D，$\sqrt[4]{(4-2\sqrt{3})^2}+2\log_2 3\cdot\log_9 4=\sqrt[4]{[(\sqrt{3}-1)^2]^2}+\frac{\lg 9}{\lg 2}\times\frac{\lg 4}{\lg 9}=\sqrt{3}-1+2=\sqrt{3}+1$，故 D 正确. 故选 ACD.

10. 1 【解析】$16^{\frac{1}{4}}+\log_{\frac{1}{2}} 2=(2^4)^{\frac{1}{4}}+\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2-1=1$.

11. $\pi+1$ 【解析】$\sqrt{(3-\pi)^2}+2^{\log_2 3}+\lg 25-\lg\frac{5}{2}=\pi-3+3+\lg\left(25\times\frac{2}{5}\right)=\pi+1$.

12. $\frac{3n+1}{mn+n+1}$ 【解析】由 $\log_7 2=n$，得 $\log_2 7=\frac{1}{n}$，又 $\log_2 3=m$，所以 $\log_{42} 56=\frac{\log_2(2^3\times 7)}{\log_2(2\times 3\times 7)}=\frac{3+\log_2 7}{1+\log_2 3+\log_2 7}=\frac{3+\frac{1}{n}}{1+m+\frac{1}{n}}=\frac{3n+1}{mn+n+1}$.

13. 解：(1)①原式 $=2+\lg\left(4^2\times\frac{5}{8}\right)-2=2+1-2=1$.

②$\log_2 3\cdot\log_3 4+\lg 25+\lg 4=2\log_2 3\cdot\log_3 2+2\lg 5+2\lg 2=\frac{2\ln 3}{\ln 2}\cdot\frac{\ln 2}{\ln 3}+2(\lg 5+\lg 2)=2+2\lg 10=2+2=4$.

③$\log_3 27-(\lg 5+\lg 20)-\log_3 16\cdot\log_2 3+4^{\log_4 3}=3-\lg(5\times 20)-\frac{\lg 16}{\lg 3}\times\frac{\lg 3}{\lg 2}+3=3-2-4+3=0$.

(2)由题意得 $\log_5 2=\frac{1}{\log_2 5}=\frac{1}{a}$，又 $b=\log_5 7$，所以 $\log_{14} 56=\frac{\log_5 56}{\log_5 14}=\frac{\log_5(7\times 2^3)}{\log_5(7\times 2)}=\frac{\log_5 7+3\log_5 2}{\log_5 7+\log_5 2}=\frac{b+\frac{3}{a}}{b+\frac{1}{a}}=\frac{ab+3}{ab+1}$.

14. 解：方法一：$\because x\cdot\log_3 2024=\log_3 2024^x=1$，

$\therefore 2024^x=3$，$\therefore 2024^{-x}=\frac{1}{2024^x}=\frac{1}{3}$，

故 $2024^x+2024^{-x}=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$.

方法二：$\because x\cdot\log_3 2024=1$，$\therefore x=\frac{1}{\log_3 2024}=\log_{2024} 3$，

$\therefore 2024^x=2024^{\log_{2024} 3}=3$，$\therefore 2024^{-x}=\frac{1}{2024^x}=\frac{1}{3}$，

故 $2024^x+2024^{-x}=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$.

15. 25 【解析】因为 x,y,z 均为正实数，所以 $2^x=3^y=6^z>1$，令 $2^x=3^y=6^z=t>1$，则 $x=\log_2 t$，$y=\log_3 t$，$z=\log_6 t$，$\frac{4x+9y}{z}=\frac{4\log_2 t+9\log_3 t}{\log_6 t}=\frac{\frac{4\lg t}{\lg 2}+\frac{9\lg t}{\lg 3}}{\frac{\lg t}{\lg 6}}=\frac{\frac{4}{\lg 2}+\frac{9}{\lg 3}}{\frac{1}{\lg 6}}=\left(\frac{4}{\lg 2}+\frac{9}{\lg 3}\right)\times\lg 6=\left(\frac{4}{\lg 2}+\frac{9}{\lg 3}\right)\times(\lg 2+\lg 3)=13+\frac{4\lg 3}{\lg 2}+\frac{9\lg 2}{\lg 3}$. 令 $m=\frac{\lg 3}{\lg 2}$，则 $m\in(1,2)$ 且 $m\neq\frac{3}{2}$，则 $\frac{4x+9y}{z}=13+4m+\frac{9}{m}$，由对勾函数的性质知 $4m+\frac{9}{m}\in(12,13)$，则 $\frac{4x+9y}{z}=13+4m+\frac{9}{m}\in(25,26)$，所以 $n=25$.

16. 解：(1)原式 $=\frac{\lg 3}{2\lg 2}\times\left(\frac{3\lg 2}{2\lg 3}+\frac{4\lg 2}{3\lg 3}\right)=\frac{\lg 3}{2\lg 2}\times\frac{17\lg 2}{6\lg 3}=\frac{17}{12}$.

(2)由题意知，令 $3^x=4^y=6^z=a$，则 $a>1$，

所以 $x=\log_3 a$，$y=\log_4 a$，$z=\log_6 a$，

所以 $\frac{y}{z}-\frac{y}{x}=\frac{\log_4 a}{\log_6 a}-\frac{\log_4 a}{\log_3 a}=\frac{\ln a}{\ln 4}\times\frac{\ln 6}{\ln a}-\frac{\ln a}{\ln 4}\times\frac{\ln 3}{\ln a}=\frac{\ln 6}{\ln 4}-\frac{\ln 3}{\ln 4}=\frac{\ln 2}{2\ln 2}=\frac{1}{2}$.

(3)设 $2^{2024}=t$，则 $\lg t=2024\cdot\lg 2$，又 $\lg 2\approx 0.301\ 0$，

所以 $\lg t\approx 2024\times 0.301\ 0=609.224$，

所以 $t\approx 10^{609.224}$，则 $t\in(10^{609},10^{610})$，

所以 2^{2024} 的位数为 610.

4.4 对数函数

4.4.1 对数函数的概念

1. A 【解析】由已知得 $f(-2)=\log_2(-2+a)=0$，所以 $-2+a=1$，解得 $a=3$，故选 A.

2. B 【解析】对于 A，真数为 x^2，而不是 x，故 A 不是对数函

数;对于 B,底数 $\pi-e$ 为常数,且 $0<\pi-e<1$,真数为 x,且系数为 1,故 B 是对数函数;对于 C,真数为常数,而不是 x,故 C 不是对数函数;对于 D,真数为 $\frac{x}{2}$,而不是 x,故 D 不是对数函数. 故选 B.

3. D **[解析]** 因为 $f(x)=\sqrt{x-1}+\log_2(3-x)$,所以 $\begin{cases}x-1\geqslant 0,\\3-x>0,\end{cases}$ 解得 $1\leqslant x<3$,所以函数的定义域是 $[1,3)$,故选 D.

4. B **[解析]** 令 $\frac{2}{x}+1=t(t>1)$,则 $x=\frac{2}{t-1}$,所以 $f(t)=\lg\frac{2}{t-1}$,所以 $f(x)=\lg\frac{2}{x-1}$. 故选 B.

5. A **[解析]** 由题意得 $f(-1)=(-1)^2=1$,所以 $f[f(-1)]=f(1)=2-\log_4 1=2$. 故选 A.

6. B **[解析]** 由题意得 $CB=y=a-CA=\left(\frac{1}{2}\right)^t=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{3}}$,所以 $x=3\log_{\frac{1}{2}}y$,所以当 $y=\frac{1}{64}$ 时,$x=3\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{64}=18$. 故选 B.

7. D **[解析]** 由函数 $f(x)=\lg(ax^2-2x+a)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,得对任意 $x\in\mathbf{R}$,$ax^2-2x+a>0$ 恒成立,令 $h(x)=ax^2-2x+a$. 当 $a=0$ 时,$ax^2-2x+a>0$ 即为 $-2x>0$,不恒成立,故 $a\neq 0$,若 $h(x)=ax^2-2x+a>0$ 恒成立,则需 $\begin{cases}a>0,\\\Delta=4-4a^2<0,\end{cases}$ 解得 $a>1$. 综上,实数 a 的取值范围为 $(1,+\infty)$. 故选 D.

8. AC **[解析]** 根据对数函数的定义,可得 $y=\log_{\frac{1}{4}}x$ 和 $y=\ln x$ 都是对数函数. 故选 AC.

9. BC **[解析]** 当 $a<2$ 时,$3^{a+2}=3$,解得 $a=-1$;当 $a\geqslant 2$ 时,$\log_3(a^2+2)=3$,可得 $a=5$. 综上,$a=5$ 或 $a=-1$. 故选 BC.

10. $(1,5]$ **[解析]** 由题意得 $\begin{cases}-2\leqslant 2x\leqslant 10,\\x-1>0,\end{cases}$ 解得 $1<x\leqslant 5$,
∴函数 $y=f(2x)\cdot\lg(x-1)$ 的定义域为 $(1,5]$.

11. $-\frac{1}{2}$ **[解析]** 当 $x\leqslant 0$ 时,$f(x)=2^x-1\leqslant 2^0-1=0$,又 $f(a)=1$,所以 $a>0$,由 $f(a)=-\log_{\frac{1}{2}}(a+1)=\log_2(a+1)=1$,得 $a+1=2$,可得 $a=1$,所以 $f(a-2)=f(1-2)=f(-1)=2^{-1}-1=-\frac{1}{2}$.

12. $e^{\frac{3}{500}}-1$ **[解析]** 由题意可得 $12=2000\ln\left(1+\frac{M}{m}\right)$,则 $\ln\left(1+\frac{M}{m}\right)=\frac{3}{500}$,即 $1+\frac{M}{m}=e^{\frac{3}{500}}$,所以 $\frac{M}{m}=e^{\frac{3}{500}}-1$.

13. **解:**(1)将点 $(-1,0)$ 的坐标代入 $y=\log_a(x+a)(a>0$,且 $a\neq 1)$,得 $0=\log_a(-1+a)$,
则 $-1+a=1$,所以 $a=2$.
(2)由(1)知 $y=\log_2(x+2)$,由 $x+2>0$,解得 $x>-2$,所以函数的定义域为 $(-2,+\infty)$.

14. **解:**(1)将 $v=1.7$,$x=6400$ 代入 $v=\frac{1}{3}\log_2\frac{x}{100}-\lg x_0$,得 $1.7=\frac{1}{3}\log_2\frac{6400}{100}-\lg x_0$,
即 $\lg x_0=0.3$,解得 $x_0=2$,所以此时 x_0 的值为 2.
(2)设甲北极燕鸥每分钟的耗氧量为 x_1,乙北极燕鸥每分钟的耗氧量为 x_2,乙北极燕鸥每分钟的耗氧偏差为 x_0',
因为甲北极燕鸥每分钟的耗氧偏差是乙北极燕鸥每分钟耗氧偏差的 10 倍,所以甲北极燕鸥每分钟的耗氧偏差为 $10x_0'$.
由题意可知,甲北极燕鸥的飞行速度 $v_1=\frac{1}{3}\log_2\frac{x_1}{100}-\lg(10x_0')=\frac{1}{3}\log_2\frac{x_1}{100}-\lg x_0'-1$,乙北极燕鸥的飞行速度 $v_2=\frac{1}{3}\log_2\frac{x_2}{100}-\lg x_0'$,
由 $v_1=v_2$,得 $\frac{1}{3}\log_2\frac{x_1}{100}-\frac{1}{3}\log_2\frac{x_2}{100}=1$,
即 $\log_2\frac{x_1}{x_2}=3$,所以 $\frac{x_1}{x_2}=8$,即甲北极燕鸥每分钟的耗氧量是乙北极燕鸥每分钟耗氧量的 8 倍.

15. C **[解析]** 设五分记录法中最大值对应的小数记录法数据为 V_1,最小值对应的小数记录法数据为 V_2,则 $\begin{cases}5.2=5+\lg V_1,\\4.0=5+\lg V_2,\end{cases}$ 两式相减得 $1.2=\lg V_1-\lg V_2=\lg\frac{V_1}{V_2}$,则 $\frac{V_1}{V_2}=10^{1.2}$,且 $\lg a=1.4$,可得 $a=10^{1.4}$,所以 $\frac{V_1}{V_2}=(10^{2.4})^{\frac{1}{2}}=(10\times 10^{1.4})^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10a}$,故 C 正确,检验可知其余选项均不符合. 故选 C.

16. **解:**设 $t=3-ax$,∵$a>0$,且 $a\neq 1$,∴$t=3-ax$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数,
∴当 $x\in\left[0,\frac{3}{2}\right]$ 时,$t=3-ax$ 的最小值为 $3-\frac{3}{2}a$.
又∵当 $x\in\left[0,\frac{3}{2}\right]$ 时,$f(x)$ 恒有意义,即 $t>0$ 对 $x\in\left[0,\frac{3}{2}\right]$ 恒成立,
∴$3-\frac{3}{2}a>0$,∴$a<2$,
又 $a>0$,且 $a\neq 1$,∴实数 a 的取值范围为 $(0,1)\cup(1,2)$.

4.4.2 对数函数的图象和性质

第 1 课时 对数函数的图象和性质

1. D **[解析]** 令 $x+2=1$,得 $x=-1$,此时 $y=\log_a 1+1=1$,故函数 $y=\log_a(x+2)+1(a>0$,且 $a\neq 1)$ 的图象过定点 $(-1,1)$. 故选 D.

2. B **[解析]** 要使函数 $f(x)=\sqrt{1-\ln x}$ 有意义,则 $\begin{cases}1-\ln x\geqslant 0,\\x>0,\end{cases}$ 解得 $0<x\leqslant e$,故函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,e]$,故选 B.

3. C **[解析]** 因为函数 $y=\log_2 x$ 是 $(0,+\infty)$ 上的增函数,所以 $y=\log_2 x$ 在 $[1,2]$ 上的取值范围是 $[\log_2 1,\log_2 2]=[0,1]$. 故选 C.

4. D **[解析]** 因为 $y=\log_2 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,$3^2>2^3>0$,所以 $\log_2 3^2>\log_2 2^3$,即 $2\log_2 3>3$,所以 $b=\log_2 3>\frac{3}{2}$. 因为 $y=\log_3 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,$0<4^2<3^3$,所以

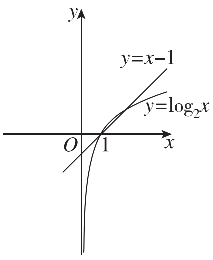
$\log_3 4^2 < \log_3 3^3$，即 $2\log_3 4 < 3$，所以 $c=\log_3 4 < \frac{3}{2}$，同时 $c=\log_3 4 > \log_3 3 = 1$，所以 $1 < c < \frac{3}{2}$. 因为 $y=\log_{0.2} x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $a=\log_{0.2} 0.3 < \log_{0.2} 0.2 = 1$，所以 $b > \frac{3}{2} > c > 1 > a$. 故选 D.

5. D **[解析]** 由题意可得 $\begin{cases} 2x+3>0, \\ 5x-6>0, \\ 2x+3>5x-6, \end{cases}$ 解得 $\frac{6}{5} < x < 3$，

∴不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(2x+3) < \log_{\frac{1}{2}}(5x-6)$ 的解集为 $\left(\frac{6}{5}, 3\right)$，故选 D.

6. B **[解析]** 函数 $g(x)=(a-1)x^2-ax$ 的图象过原点，排除 A，C；当 $0<a<1$ 时，$f(x)=\log_a x$ 是 $(0,+\infty)$ 上的减函数，$g(x)$ 的图象开口向下，排除 D. 故选 B.

7. D **[解析]** $f(x)=\log_2 x - x + 1$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，由 $f(x)<0$ 可得 $\log_2 x < x-1$，在同一平面直角坐标系中画出 $y=\log_2 x$，$y=x-1$ 的图象如图. 因为 $f(1)=\log_2 1 - 1 + 1 = 0$，$f(2)=\log_2 2 - 2 + 1 = 0$，所以由图可知，不等式 $f(x)<0$ 的解集是 $(0,1)\cup(2,+\infty)$.



8. BD **[解析]** 对于 A，函数 $y=\log_{0.2} x$ 是 $(0,+\infty)$ 上的减函数，所以 $\log_{0.2} 0.3 > \log_{0.2} 0.4$，故 A 不成立；对于 B，$2^{0.3} > 2^0 = 1 = \log_3 3 > \log_3 2$，故 B 成立；对于 C，$\log_3 e < \log_3 3 = 1 = \ln e < \ln 3$，故 C 不成立；对于 D，$\log_2 5 > \log_2 4 = 2 = \log_3 9 > \log_3 5$，故 D 成立. 故选 BD.

9. ABD **[解析]** 由题意可知 $\begin{cases} f(0)=\log_a b = 2, \\ f(-2)=\log_a(-2+b)=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a^2=b, \\ -2+b=1, \\ a>0, \\ a\neq 1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=\sqrt{3}, \\ b=3, \end{cases}$ 故 A，B 正确；$f(x)=\log_{\sqrt{3}}(x+3)$，由 $x+3>0$，得 $x>-3$，即函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-3,+\infty)$，故 C 错误；∵$a>1$，∴函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 D 正确. 故选 ABD.

10. $(1,0)$ **[解析]** 令 $2^x-1=1$，解得 $x=1$，此时 $f(1)=\log_a 1 = 0$，所以函数 $f(x)=\log_a(2^x-1)(a>0$，且 $a\neq 1)$ 的图象恒过的定点是 $(1,0)$.

11. $(-\infty,-1]\cup[4,+\infty)$ **[解析]** 若 $a\leqslant 0$，则由 $\left(\frac{1}{2}\right)^a \geqslant 2$，得 $a\leqslant -1$；若 $a>0$，则由 $\log_2 a \geqslant 2$，得 $a\geqslant 4$. 故 a 的取值范围是 $(-\infty,-1]\cup[4,+\infty)$.

12. $(-\infty,-1]$ **[解析]** 由题意可知，当 $a>1$ 时，$f(x)=\log_a(-x+1)$ 是 $[-2,0]$ 上的减函数，∴$\begin{cases} f(-2)=\log_a 3 = 0, \\ f(0)=\log_a 1 = -1, \end{cases}$ 无解；当 $0<a<1$ 时，$f(x)=\log_a(-x+1)$ 是 $[-2,0]$ 上的增函数，∴$\begin{cases} f(-2)=\log_a 3 = -1, \\ f(0)=\log_a 1 = 0, \end{cases}$ 解得 $a=\frac{1}{3}$，∴$g(x)=a^x+m=\left(\frac{1}{3}\right)^x+m$，∵函数 $g(x)$ 的图象不经过第一象限，∴$g(0)=\left(\frac{1}{3}\right)^0+m\leqslant 0$，解得 $m\leqslant -1$，即 m 的取值范围为 $(-\infty,-1]$.

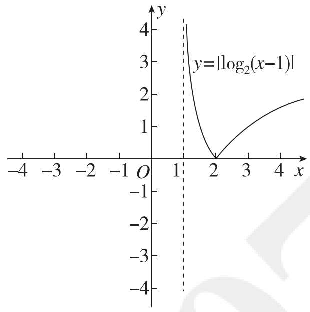
13. **解：**(1) 函数 $y=\log_2(x-1)$ 的图象是由函数 $y=\log_2 x$ 的图象向右平移 1 个单位长度得到的.

(2) $y=|\log_2(x-1)|$ 的图象如图①所示.

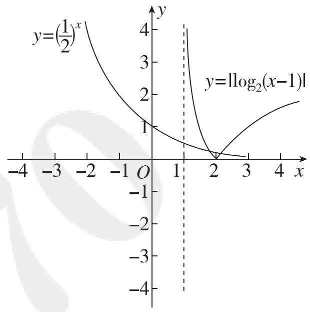
(3) 不妨设 $x_1<x_2$，在同一坐标系中作出 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 与 $y=|\log_2(x-1)|$ 的图象，如图②所示.

不妨令 $x_1<x_2$，由图知 $1<x_1<2$，$2<x_2<3$，

所以 $M=(x_1-2)(x_2-2)<0$，故 M 的符号为负.



①



②

14. **解：**(1) 由 $f(12)=3$ 可得 $\log_a(12-3)+1=3$，所以 $a=3$，所以 $f(x)=\log_3(x-3)+1$.

若 $f(x)>0$，则 $\log_3(x-3)+1>0$，

可得 $\begin{cases} x-3>0, \\ x-3>\frac{1}{3}, \end{cases}$ 所以 $x>\frac{10}{3}$，

故不等式 $f(x)>0$ 的解集为 $\left(\frac{10}{3},+\infty\right)$.

(2) 因为 $f(x)$ 在 $[4,5]$ 上的最大值与最小值之差为 1，

所以 $|\log_a 1 + 1 - (\log_a 2 + 1)| = 1$，

即 $|\log_a 2| = 1$，解得 $a=2$ 或 $a=\frac{1}{2}$，

所以 a 的值为 2 或 $\frac{1}{2}$.

15. C **[解析]** 由 $a\cdot e^{a-2}=1$ 两边取对数可得 $\ln a + a - 2 = 0$，即 $\ln a + a = 2$，由 $eb + \ln b = 1$ 可得 $eb + \ln b + 1 = 2$，即 $eb + \ln(eb) = 2$. 构造函数 $f(x)=\ln x + x(x>0)$，由 $\ln a + a = 2$ 和 $eb + \ln(eb) = 2$ 可得 $f(a)=f(eb)$，因为 $y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$y=x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)=\ln x + x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(a)=f(eb)$ 等价于 $a=eb$，故 $\frac{a}{b}=e$. 故选 C.

16. **解：**(1) 函数 $f(x)=\log_a x(a>0$，且 $a\neq 1)$ 在区间 $\left[\frac{1}{9},3\right]$ 上的最大值为 2，

当 $a>1$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{9},3\right]$ 上单调递增，最大值为 $\log_a 3 = 2$，故 $a=\sqrt{3}$.

当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{9},3\right]$ 上单调递减，最大值为 $\log_a \frac{1}{9} = 2$，故 $a=\frac{1}{3}$.

综上可得，$a=\sqrt{3}$ 或 $\frac{1}{3}$.

(2)∵$0<a<1$，∴$a=\frac{1}{3}$，∴不等式 $f[f(x)-2]>0$ 即为 $\log_{\frac{1}{3}}[f(x)-2]>0$，

∴$0<f(x)-2<1$，即 $2<f(x)<3$，即 $2<\log_{\frac{1}{3}}x<3$，解得 $\frac{1}{27}<x<\frac{1}{9}$，

故 x 的取值范围为$\left(\frac{1}{27},\frac{1}{9}\right)$.

第 2 课时　对数函数的图象及其性质的应用

1. C　**[解析]** 因为函数 $y=f(x)$的图象与 $y=\lg x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，所以函数 $y=f(x)$与函数 $y=\lg x$ 互为反函数，所以 $f(x)=10^x$，所以 $f(\lg 3)\cdot f(\lg 4)=10^{\lg 3}\times 10^{\lg 4}=3\times4=12$，故选 C.

2. A　**[解析]** ∵$3^x>0$，∴$3^x+1>1$，∴$\log_2(3^x+1)>0$，∴函数 $f(x)$的值域为$(0,+\infty)$. 故选 A.

3. C　**[解析]** 由 $x^2-x-6>0$，得$(x-3)(x+2)>0$，解得 $x>3$ 或 $x<-2$，则 $f(x)$的定义域为$(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$，又 $y=x^2-x-6$ 在$(-\infty,-2)$上单调递减，在$(3,+\infty)$上单调递增，$y=\log_3 x$ 在$(0,+\infty)$上单调递增，所以 $f(x)$在$(-\infty,-2)$上单调递减，在$(3,+\infty)$上单调递增. 故选 C.

4. A　**[解析]** 若 $\ln(a-b)<0=\ln 1$，则 $0<a-b<1$，即 $b<a<b+1$，充分性成立；若 $a<b+1$，例如 $a=b=0$，则 $a-b=0$，$\ln(a-b)$无意义，必要性不成立. 综上所述，“$\ln(a-b)<0$”是“$a<b+1$”的充分不必要条件. 故选 A.

5. B　**[解析]** 由 $\log_2 a+\log_2 b=0$（$a>0$ 且 $a\neq1$，$b>0$ 且 $b\neq1$），可得 $\log_2(ab)=0$，则 $ab=1$，即 $b=\frac{1}{a}$，所以 $g(x)=\log_b x=\log_{\frac{1}{a}}x$，又 $f(x)=\left(\frac{1}{a}\right)^x$，所以 $g(x)$与 $f(x)$互为反函数，则 $g(x)$与 $f(x)$的单调性一致，且两函数的图象关于直线 $y=x$ 对称，故选 B.

6. C　**[解析]** 因为函数 $f(x)=\log_2\frac{1}{x^2-ax+3a}$在$(2,+\infty)$上单调递减，且函数 $y=\log_2 u$ 在$(0,+\infty)$上单调递增，所以函数 $u=\frac{1}{x^2-ax+3a}$在$(2,+\infty)$上单调递减，且 $\forall x\in(2,+\infty)$，$\frac{1}{x^2-ax+3a}>0$，因此函数 $g(x)=x^2-ax+3a$ 在$(2,+\infty)$上单调递增，且 $\forall x\in(2,+\infty)$，$x^2-ax+3a>0$，于是得$\begin{cases}\frac{a}{2}\leqslant2,\\ g(2)=4+a\geqslant0,\end{cases}$解得$-4\leqslant a\leqslant4$，所以实数 a 的取值范围是$[-4,4]$. 故选 C.

7. C　**[解析]** ∵当 $x\geqslant1$ 时，$f(x)=\ln x-2a$，∴当 $x\geqslant1$ 时，$f(x)\geqslant-2a$，又 $f(x)$的值域为 $\mathbf{R}$，∴当 $x<1$ 时，$f(x)=(1-a)x+3$ 的取值范围需包含$(-\infty,-2a)$，∴$\begin{cases}1-a>0,\\ 1-a+3\geqslant-2a,\end{cases}$解得$-4\leqslant a<1$，故选 C.

8. AD　**[解析]** 因为 $\log_a 10>\log_b 10$，所以$\frac{\lg 10}{\lg a}>\frac{\lg 10}{\lg b}$，即$\frac{1}{\lg a}>\frac{1}{\lg b}$，所以 $\lg b>\lg a>0$ 或 $0>\lg b>\lg a$ 或 $\lg a>0>\lg b$，所以 $1<a<b$ 或 $0<a<b<1$ 或 $0<b<1<a$. 故选 AD.

9. ABC　**[解析]** 由题得$\begin{cases}2x+1\neq0,\\ 2x-1\neq0,\end{cases}$解得 $x\neq\pm\frac{1}{2}$，即函数 $f(x)$的定义域为$\left\{x\,\middle|\,x\neq\pm\frac{1}{2}\right\}$. $f(x)=\begin{cases}\ln\left(1+\frac{2}{2x-1}\right),x<-\frac{1}{2},\\ \ln\left(\frac{2}{1-2x}-1\right),-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2},\\ \ln\left(1+\frac{2}{2x-1}\right),x>\frac{1}{2},\end{cases}$故 $f(x)$在$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$，$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递减，在$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$上单调递增，又 $f(-x)=\ln|-2x+1|-\ln|-2x-1|=\ln|2x-1|-\ln|2x+1|=-f(x)$，所以 $f(x)$是奇函数. 综上，A，B，C 中说法错误，D 中说法正确. 故选 ABC.

10. 2　**[解析]** 方法一：∵$y=4^x$ 的反函数为 $f(x)=\log_4 x$，$f(x_0)=\frac{1}{2}$，∴$\log_4 x_0=\frac{1}{2}$，∴$x_0=2$.

方法二：依题意得 $x_0=4^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=2$.

11. 1　**[解析]** 由函数 $f(x)$为奇函数，得 $f(x)=-f(-x)$，所以 $\log_3\frac{a-x}{1+x}=-\log_3\frac{a+x}{1-x}$，所以$\frac{a-x}{1+x}=\frac{1-x}{a+x}$，所以 $a^2=1$，又易知 $a\neq-1$，所以 $a=1$.

12. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$　**[解析]** 由题意得 $x+2a>0$，解得 $x>-2a$，即 $A=\{x\mid x>-2a\}$；$g(x)=\log_2\left(x^2-x+\frac{9}{4}\right)=\log_2\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2\right]\geqslant\log_2 2=1$，即 $B=\{y\mid y\geqslant1\}$. 由 $A\subseteq B$，可得$-2a\geqslant1$，解得 $a\leqslant-\frac{1}{2}$，即 a 的取值范围为$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$.

13. **解：**(1)∵$a>1$，∴函数 $f(x)=\log_a x$ 在$\left[\frac{1}{2},3\right]$上单调递增.

∵$f(x)$在$\left[\frac{1}{2},3\right]$上的最大值为 1，

∴$f(3)=\log_a 3=1$，解得 $a=3$.

(2)∵$a=3$，∴$F(x)=\log_3\left(\frac{1}{3}+x\right)+\log_3\left(\frac{1}{3}-x\right)=\log_3\left[\left(\frac{1}{3}+x\right)\left(\frac{1}{3}-x\right)\right]=\log_3\left(\frac{1}{9}-x^2\right)$.

由$\begin{cases}\frac{1}{3}+x>0,\\ \frac{1}{3}-x>0,\end{cases}$解得$-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$，∴函数 $F(x)$的定义域为$\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

令 $t=\frac{1}{9}-x^2$，则 $t\in\left(0,\frac{1}{9}\right]$，

∴$F(x)\leqslant\log_3\frac{1}{9}=-2$，

∴$F(x)$的值域为$(-\infty,-2]$.

14. **解：**(1)要使函数 $g(x)=\log_2(1-x)+\log_2(1+x)$有意义，

则需$\begin{cases}1-x>0,\\ 1+x>0,\end{cases}$解得$-1<x<1$,
故$g(x)$的定义域为$(-1,1)$.
(2)$g(x)$为偶函数.
证明:∵$g(x)$的定义域为$(-1,1)$,关于原点对称,
且$g(-x)=\log_2(1+x)+\log_2(1-x)=g(x)$,
∴$g(x)$为偶函数.
(3)若存在正整数m,使得不等式$g(x)\geqslant m-1$成立,
则$g(x)_{\max}\geqslant m-1$.
$g(x)=\log_2(1-x)+\log_2(1+x)=\log_2(1-x^2)$,
∵$y=1-x^2$在$(-1,0]$上单调递增,在$(0,1)$上单调递减,
∴$y_{\max}=1-0=1$,∴$g(x)_{\max}=\log_2 1=0$,
∴$m-1\leqslant 0$,则$m\leqslant 1$,
故存在正整数$m=1$,使得不等式$g(x)\geqslant m-1$成立.

15. B 【解析】当$x\geqslant 1$时,$f(x)=1-3^{1-x}$在$[1,+\infty)$上单调递增,此时$f(x)\in[0,1)$,无最大值;当$x<1$时,因为$y=x^2+2a$在$(-\infty,0]$上单调递减,在$[0,1)$上单调递增,所以$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2a)$在$(-\infty,0]$上单调递增,在$[0,1)$上单调递减,所以当$x<1$时,$f(x)$的最大值为$f(0)=\log_{\frac{1}{2}}(2a)$.由题意可得$\log_{\frac{1}{2}}(2a)\geqslant 1$,∴$0<2a\leqslant\frac{1}{2}$,解得$0<a\leqslant\frac{1}{4}$,即实数$a$的取值范围为$\left(0,\frac{1}{4}\right]$,故选B.

16. 解:(1)∵$f(1)=1$,∴$\log_4(a+5)=1$,解得$a=-1$,
∴$f(x)=\log_4(-x^2+2x+3)$.
由$-x^2+2x+3>0$,解得$-1<x<3$,
∴$f(x)$的定义域为$(-1,3)$.
∵函数$t=-x^2+2x+3$在$(-1,1)$上单调递增,在$(1,3)$上单调递减,而$y=\log_4 t$是定义域上的增函数,
∴函数$f(x)$的单调递增区间为$(-1,1)$.
(2)∵函数$f(x)=\log_4(ax^2+2x+3)$的最小值为0,
∴函数$t=ax^2+2x+3$有最小值1,
∴$\begin{cases}a>0,\\ \frac{12a-4}{4a}=1,\end{cases}$解得$a=\frac{1}{2}$.
(3)∵函数$f(x)=\log_4(ax^2+2x+3)$的值域为$\mathbf{R}$,
∴函数$t=ax^2+2x+3$能够取到大于0的所有实数,则$a=0$或$\begin{cases}a>0,\\ 2^2-12a\geqslant 0,\end{cases}$∴$0\leqslant a\leqslant\frac{1}{3}$.

习题课 指数函数与对数函数的图象与性质

1. C 【解析】由题意知$\begin{cases}x>0,\\ (\log_2 x)^2-1>0,\end{cases}$解得$0<x<\frac{1}{2}$或$x>2$,故选C.

2. D 【解析】设指数函数为$f(x)=b^x(b>0$,且$b\neq 1)$,幂函数为$g(x)=x^\alpha$,对数函数为$h(x)=\log_a x(a>0$,且$a\neq 1)$.∵$f(1)=b$,$g(1)=1^\alpha=1$,$h(1)=0$,∴点$\left(1,\frac{1}{2}\right)$和点$\left(1,-\frac{1}{2}\right)$都不是集合$M$中的元素;∵$f(-2)=\frac{1}{b^2}>0$,$g(-2)=(-2)^\alpha$,$h(-2)$不存在,∴点$\left(-2,-\frac{1}{4}\right)$不是集合$M$中的元素;当$b=2$,$\alpha=-2$时,$f(-2)=g(-2)=\frac{1}{4}$,∴点$\left(-2,\frac{1}{4}\right)$是集合$M$中的元素.故选D.

3. C 【解析】由$\left(\frac{1}{3}\right)^a<\left(\frac{1}{3}\right)^b$可得$a>b$,当$a>b$时,$\log_2 a>\log_2 b$不一定成立;反之,由$\log_2 a>\log_2 b$可得$a>b>0$,当$a>b>0$时,$\left(\frac{1}{3}\right)^a<\left(\frac{1}{3}\right)^b$一定成立.所以“$\left(\frac{1}{3}\right)^a<\left(\frac{1}{3}\right)^b$”是“$\log_2 a>\log_2 b$”的必要不充分条件.故选C.

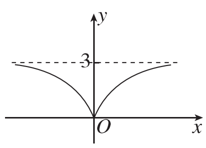
4. D 【解析】由已知得$a=3$,所以$f(x)=\log_3(-x+1)$,则$f(0)=0$,排除A,B;$f(-2)=1$,排除C.故选D.

5. C 【解析】设第x代种子的数量为15^{x-1},由题意得$15^{x-1}\geqslant 10^7$,解得$x-1\geqslant\log_{15}10^7$,即$x\geqslant\log_{15}10^7+1$.因为$\log_{15}10^7+1=\frac{\lg 10^7}{\lg 15}+1=\frac{7}{\lg 3+\lg 5}+1=\frac{7}{\lg 3+1-\lg 2}+1\approx\frac{7}{0.48+1-0.30}+1\approx 6.93$,所以种子数量首次超过1000万粒的是第7代种子.故选C.

6. B 【解析】在函数$f(x)=a^{x-3}+1$中,令$x-3=0$,得$x=3$,又$f(3)=a^0+1=2$,所以$f(x)$的图象恒过点$(3,2)$,所以$m=3$,$n=2$.对于A,$\log_m n=\log_3 2<\log_2 3=\log_n m$,故A错误;对于B,因为$2^m=8$,$3^n=9$,所以$2^m<3^n$,故B正确;对于C,$2\log_2 m=2\log_2 3=\log_2 9$,$3\log_3 n=3\log_3 2=\log_3 8$,因为$\log_2 9>2>\log_3 8$,所以$2\log_2 m>3\log_3 n$,故C错误;对于D,$m^m=3^3>2^2=n^n$,故D错误.故选B.

7. D 【解析】$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$,∵$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}+\ln(\sqrt{1+x^2}+x)$,∴$f(-x)=\frac{e^{-x}-e^x}{2}+\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$,∴$f(-x)+f(x)=\frac{e^{-x}-e^x}{2}+\ln(\sqrt{1+x^2}-x)+\frac{e^x-e^{-x}}{2}+\ln(\sqrt{1+x^2}+x)=0+\ln 1=0$,∴$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}+\ln(\sqrt{1+x^2}+x)$为奇函数,易知$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}+\ln(\sqrt{1+x^2}+x)$在$\mathbf{R}$上为增函数.∵$f(2^x-4^x)+f(m\cdot 2^x-2)<0$,∴$f(2^x-4^x)<-f(m\cdot 2^x-2)=f(2-m\cdot 2^x)$,∴$2^x-4^x<2-m\cdot 2^x$,∴$m\cdot 2^x<2-2^x+4^x$,∴$m<\frac{2-2^x+4^x}{2^x}=2^x+\frac{2}{2^x}-1$对任意$x\in\mathbf{R}$恒成立.∵$2^x>0$,∴$2^x+\frac{2}{2^x}-1\geqslant 2\sqrt{2^x\times\frac{2}{2^x}}-1=2\sqrt{2}-1$,当且仅当$2^x=\frac{2}{2^x}$,即$x=\frac{1}{2}$时取等号,∴$m<2\sqrt{2}-1$.故选D.

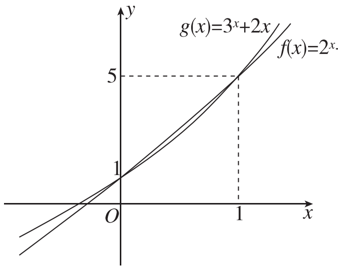
8. BC 【解析】作出函数$f(x)=-3a^{|x|}+3(0<a<1)$的大致图象如图,



可得$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减,在$[0,+\infty)$上单调递增,$f(x)$有最小值0,无最大值,且$f(x)$的值域为$[0,3)$,故A错误,B正确;若方程$f(x)-m=0$有两个实根,则函数$f(x)$的图象与直线$y=m$有两个交点,可得$0<m<3$,故C正确;因为当$x\in\mathbf{R}$时,不等式$f(x)-m<0$恒成立,所以$m\geqslant 3$,即m的取值范围为$[3,+\infty)$,故D错误.故选BC.

9. ABD 【解析】设$f(x)=2^x+3x$,$g(x)=3^x+2x$,易知

$f(x)$,$g(x)$在定义域上是增函数,画出$f(x)$,$g(x)$的大致图象如图所示.根据图象可知,当$x=0$或$x=1$时,$f(x)=g(x)$.因为当$0<x<1$时,$f(x)>g(x)$,所以当$0<a<b<1$时,$f(a)=g(b)$可能成立,故A正确;因为当$x<0$时,$f(x)<g(x)$,所以当$b<a<0$时,$f(a)=g(b)$可能成立,故B正确;因为当$x>1$时,$f(x)<g(x)$,所以当$1<a<b$时,$f(a)<g(b)$,所以$f(a)=g(b)$不可能成立,故C错误;当$a=b=0$或$a=b=1$时,$f(a)=g(b)$,故D正确.故选ABD.



10. $\frac{1}{10}$ 【解析】由题意得$f\left[f\left(\frac{1}{10}\right)\right]=f\left(\lg\frac{1}{10}\right)=f(-1)=10^{-1}=\frac{1}{10}$.

11. 2 【解析】当$a>1$时,由函数$f(x)=\log_a(x+1)$的定义域和值域都为$[0,1]$,可得当$x=1$时,函数取得最大值$\log_a 2=1$,解得$a=2$.当$0<a<1$时,由条件可得当$x=1$时,函数取得最小值$\log_a 2=0$,无解.综上可得,$a=2$.

12. $f(x)=2^x$(答案不唯一,指数函数都可以)
【解析】令$f(x)=2^x$,则$f(x_1+x_2)=2^{x_1+x_2}$,$f(x_1)f(x_2)=2^{x_1}\times 2^{x_2}=2^{x_1+x_2}$,所以$f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$,故$f(x)=2^x$满足条件.

13. **解:**(1)因为$f(1)=27$,所以$3^{a+1}=27$,解得$a=2$.
(2)因为$f(x)$有最大值9,
所以$3^{-x^2+2x+a}\leqslant 9$,所以$-x^2+2x+a\leqslant 2$,
即函数$y=-x^2+2x+a$有最大值2,
则有$\frac{-4a-4}{-4}=2$,解得$a=1$.

14. **解:**(1)由题意得$A(2,\log_3 2)$,$B(4,\log_3 4)$,$C(4,\log_m 4)$.因为AC垂直于y轴,
所以$\log_m 4=\log_3 2$,所以$m=9$.
(2)由题意得$A(a,\log_c a)$,$B(b,\log_c b)$,$C(b,\log_m b)$.
因为AC垂直于y轴,所以$\log_m b=\log_c a$,
又$b=a^2$,所以$m=c^2$,所以$\frac{2c}{a}-\frac{m}{b}=\frac{2c}{a}-\frac{c^2}{a^2}=-\left(\frac{c}{a}-1\right)^2+1$,
所以当$\frac{c}{a}=1$时,$\frac{2c}{a}-\frac{m}{b}$取得最大值1.

15. **解:**(1)因为$f(x)=\log_2(1+a\cdot 2^x+4^x)$,
所以$f(1)=\log_2(1+2a+4)$,$f(2)=\log_2(1+4a+16)$,
又$f(2)=f(1)+2$,所以$\log_2(4a+17)=\log_2(2a+5)+2$,
解得$a=-\frac{3}{4}$.
(2)因为当$x\in[1,+\infty)$时,$f(x)\geqslant x-1$恒成立,
所以$\log_2(1+a\cdot 2^x+4^x)\geqslant x-1$在$[1,+\infty)$上恒成立,
即$1+a\cdot 2^x+4^x\geqslant 2^{x-1}$在$[1,+\infty)$上恒成立,分离参数得$a\geqslant\frac{1}{2}-(2^x+2^{-x})$,该不等式对$x\in[1,+\infty)$恒成立.
因为$x\geqslant 1$,所以当$x=1$时,2^x+2^{-x}取得最小值$\frac{5}{2}$,
所以$a\geqslant\frac{1}{2}-\frac{5}{2}=-2$,
即a的取值范围为$[-2,+\infty)$.

4.4.3 不同函数增长的差异

1. D 【解析】根据常函数、一次函数、对数函数、指数函数的性质可知,随着x的增长,增长速度最快的是指数函数,故选D.

2. B 【解析】方法一:在同一平面直角坐标系中画出函数$y=\log_2 x$,$y=x^2$,$y=2^x$的图象(图略),在区间$(2,4)$上从上往下依次是$y=x^2$,$y=2^x$,$y=\log_2 x$的图象,所以$x^2>2^x>\log_2 x$.
方法二:取$x=3$,经检验易知选B.

3. C 【解析】由函数$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$,$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$与$h(x)=x^{-\frac{1}{2}}$在区间$(0,+\infty)$上的图象以及性质知函数$f(x)$,$g(x)$,$h(x)$的衰减速度均逐渐变慢,故选C.

4. A 【解析】指数函数$y=1.05^x$的底数大于1,所以其增长速度随着x的增大会越来越快,它比幂函数$y=x^2$,函数$y=\lg(x+1)$,一次函数$y=50x$增长的速度快,所以从足够长远的角度看,使得公司获得最大收益的函数模型是$y=10\times 1.05^x$,故选A.

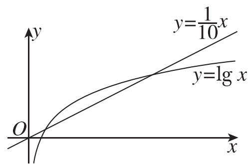
5. C 【解析】根据数据可知,当x每增加1时,y的增长速度是不相同的,所以不是线性关系,排除A;当x增加时,y的增长速度越来越慢,所以不符合指数型函数和二次函数的特征,排除B,D.故选C.

6. B 【解析】由散点图可知,函数在$(0,+\infty)$上单调递减,且散点分布在一条曲线附近,函数$y=ax+b$的图象为一条直线,不符合题意;函数$y=a\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x+b$的图象为一条曲线,且当$a>0$时,该函数单调递减;函数$y=x^a+b(a>0)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增,不符合题意;函数$y=ax+\frac{b}{x}(a>0,b>0)$在区间$\left(0,\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$上单调递减,在区间$\left(\sqrt{\frac{b}{a}},+\infty\right)$上单调递增,不符合题意.故选B.

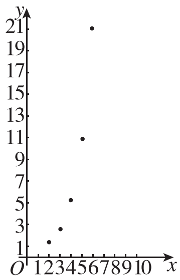
7. A 【解析】该植物生长蔓延的速度越来越快,因为$y=pa^x(p>0,a>1)$的增长速度越来越快,$y=m\log_a x(m>0,a>1)$和$y=nx^{\alpha}(n>0,0<\alpha<1)$的增长速度越来越慢,所以最适合描述$y$与$x$之间关系的函数模型是$y=pa^x(p>0,a>1)$.故选A.

8. A 【解析】结合函数$y=3^x$,$y=x^3$,$y=\log_3 x$的图象,可知,当$x>10$时,$3^x>x^3>\log_3 x$,所以“$\forall x>x_0$,$3^x>x^3>\log_3 x$”为真命题.故选A.

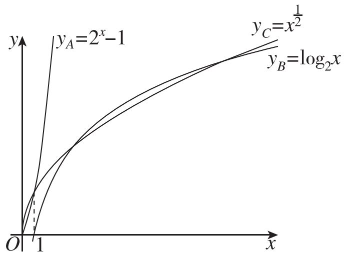
9. 慢 【解析】如图是一次函数$y=\frac{1}{10}x$与对数函数$y=\lg x$的图象,由图可知一次函数$y=\frac{1}{10}x$保持固定的增长速度,而对数函数$y=\lg x$的增长速度越来越慢.



10. 10 【解析】根据表格中的数据画出散点图,如图.观察发现,散点分布在函数 $y=\frac{2^x}{3}$的图象附近,因此选择 $y=\frac{2^x}{3}$这一函数模型.当$\frac{2^x}{3}>300$ 时,$2^x>900$,则有 $x>\log_2 900=\frac{\lg 900}{\lg 2}=\frac{2+2\lg 3}{\lg 2}\approx 9.814$.由 $1\leqslant x\leqslant 12$ 且 $x\in\mathbf{N}^*$,得 x 的最小值为 10.



11. ①② 【解析】在同一坐标系内画出 $y_A=2^x-1$,$y_B=\log_2 x$,$y_C=x^{\frac{1}{2}}$在$[0,+\infty)$上的图象如图所示.当 $x>1$ 时,函数 $y_A=2^x-1$ 的增长速度最快,且当 $x=1$ 时,$y_A=2-1=1$,$y_B=\log_2 1=0$,$y_C=1^{\frac{1}{2}}=1$,故当 $x>1$ 时,A 总走在最前面,①正确;当 $0<x<1$ 时,由图可知,C 总走在最前面,②正确;当 $x=4$ 时,$y_B=\log_2 4=2$,$y_C=4^{\frac{1}{2}}=2$,当 $x=16$ 时,$y_B=\log_2 16=4$,$y_C=16^{\frac{1}{2}}=4$,由图可知,当 $4<x<16$ 时,B 走在C 前面,当 $x>16$ 时,B 走在 C 后面,③错误.故填①②.



12. **解**:(1)随着 x 的增大,各函数的函数值都在增大.
(2)随着 x 的增大,$f_1(x)=2^x$ 的增长速度越来越快,$f_2(x)=2x+7$ 均匀增长,$f_3(x)=\log_2 x$ 的增长速度越来越慢.

13. **解**:(1)选择模型③,理由如下:当 $10\leqslant x\leqslant 300$ 时,
①②③中的 $f(x)$均随 x 的增大而增大,但当 x 增大时,①中 $f(x)$的增长速度不变,②中 $f(x)$的增长速度越来越慢,③中 $f(x)$的增长速度越来越快,故选择模型③.
(2)由题意得 $f(10)=0$,$f(20)=2$,
则$\begin{cases}k\cdot 10^2+b=0,\\ k\cdot 20^2+b=2,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=\frac{1}{150},\\ b=-\frac{2}{3},\end{cases}$故 $f(x)=\frac{x^2}{150}-\frac{2}{3}$,
所以 $f(200)=\frac{200^2}{150}-\frac{2}{3}=266$.
故销售业绩为 200 万元时的奖金为 266 千元.

滚动习题(七)

1. B 【解析】依题意得$\frac{2x-3}{x-1}\geqslant 1$,即$\frac{2x-3}{x-1}-1\geqslant 0$,即$\frac{x-2}{x-1}\geqslant 0$,解得 $x<1$ 或 $x\geqslant 2$,所以 $f(x)$的定义域为$(-\infty,1)\cup[2,+\infty)$.故选 B.

2. A 【解析】$y=2024x$ 是一次函数,$y=x^{2024}$ 是幂函数,$y=\log_{2024}x$ 是对数函数,$y=2024^x$ 是指数函数,当 x 足够大时,指数函数的增长速度最快,故选 A.

3. C 【解析】由题意可得 $\log_a 4=\frac{1}{2}=\log_a a^{\frac{1}{2}}=\log_a\sqrt{a}$,所以$\sqrt{a}=4$,解得 $a=16$,则 $\log_4 a=\log_4 16=2$.故选 C.

4. B 【解析】由题知 $f(\mathrm{e})=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$,$g(\mathrm{e})=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$,$h(\mathrm{e})=\mathrm{e}^{\mathrm{e}-1}$,$t(\mathrm{e})=2$,因为 $h(\mathrm{e})=\mathrm{e}^{\mathrm{e}-1}>2$,$t(\mathrm{e})=2$,$2>\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}>\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$,所以曲线 a,b,c,d 对应的函数分别为$h(x)$,$t(x)$,$f(x)$,$g(x)$,故选 B.

5. A 【解析】由 $y=\log_3\frac{x}{27}=\log_3 x-\log_3 27=\log_3 x-3$,得将函数 $y=\log_3 x$ 的图象向下平移 3 个单位长度得到 $y=\log_3\frac{x}{27}$的图象.故选 A.

6. A 【解析】因为 $x_1\in[0,3]$,所以 $x_1^2+1\in[1,10]$,所以 $\lg(x_1^2+1)\in[0,1]$,即 $f(x_1)\in[0,1]$.因为 $x_2\in[1,2]$,所以$\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}-m\in\left[\frac{1}{4}-m,\frac{1}{2}-m\right]$,即 $g(x_2)\in\left[\frac{1}{4}-m,\frac{1}{2}-m\right]$.因为对于任意 $x_1\in[0,3]$,存在 $x_2\in[1,2]$,使得$f(x_1)\leqslant g(x_2)$,所以 $f(x_1)_{\max}\leqslant g(x_2)_{\max}$,则$\frac{1}{2}-m\geqslant 1$,解得 $m\leqslant-\frac{1}{2}$,即 m 的取值范围为$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$.故选 A.

7. ACD 【解析】对于 A,令 $f(x)=3^{|x|+1}$,其定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f(-x)=3^{|-x|+1}=3^{|x|+1}=f(x)$,故该函数是偶函数,当 $x\in(1,+\infty)$时,$f(x)=3^{x+1}$,此时函数单调递增,故 A 符合题意;对于 B,由$\begin{cases}x+1>0,\\ x-1>0,\end{cases}$解得 $x>1$,所以函数 $y=\ln(x+1)+\ln(x-1)$的定义域不关于原点对称,该函数是非奇非偶函数,故 B 不符合题意;对于 C,二次函数 $y=x^2+2$ 图象的对称轴为 y 轴,且 $y=x^2+2$ 在$(0,+\infty)$上单调递增,故 C 符合题意;对于 D,令 $g(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$,其定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,且 $g(-x)=x^2+\frac{1}{x^2}=g(x)$,故该函数为定义域上的偶函数,因为 $y=t+\frac{1}{t}$在$(1,+\infty)$上单调递增,且函数 $t=x^2$ 在$(1,+\infty)$上单调递增,所以根据复合函数的单调性,可知 $g(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$在$(1,+\infty)$上单调递增,故 D 符合题意.故选 ACD.

8. BCD 【解析】对于 A,由 $x^2-2x-3>0$,解得 $x<-1$ 或 $x>3$,故函数的定义域为$(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$,由复合函数的单调性可知该函数的单调递减区间为$(3,+\infty)$,A 错误;对于 B,$f(x)=1-\frac{2}{\mathrm{e}^x+1}$,因为 $y=\mathrm{e}^x+1$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,且 $\mathrm{e}^x+1>0$,所以 $y=\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}$在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,则 $y=-\frac{2}{\mathrm{e}^x+1}$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,因此 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,B 正确;对于 C,当 $x<0$ 时,$y=\lg|x|=\lg(-x)$,由复合函数的单调性知 $y=\lg|x|$在$(-\infty,0)$上单调递减,C 正确;对于 D,$y=-\log_3 x=\log_{\frac{1}{3}}x$,因为函数 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$ 互为反函数,所以两函数图象关于直线 $y=x$ 对称,D 正确.故选 BCD.

9. $\frac{2a}{b}$ 【解析】$\log_3 4=\frac{\lg 4}{\lg 3}=\frac{2\lg 2}{\lg 3}=\frac{2a}{b}$.

10. $[3,+\infty)$ 【解析】令 $t=g(x)=ax^2-4x+1$,则 $y=\log_a t$,由题可知 $t=g(x)>0$ 在$(1,+\infty)$上恒成立,$y=\log_a t$ 在定

义域上单调递增，且 $t=g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. 因为 $t=g(x)=ax^2-4x+1$ 的图象的对称轴为直线 $x=\frac{2}{a}$，所以 $\begin{cases}a>1,\\ \frac{2}{a}\leqslant 1,\\ g(1)=a-3\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $a\geqslant 3$.

11. ③ 【解析】若模型为 $f(x)=2^x+a$，则由 $f(1)=2+a=4$，得 $a=2$，即 $f(x)=2^x+2$，此时 $f(2)=6$，$f(3)=10$，$f(4)=18$，与表格中的数据相差太大，不符合. 若模型为 $f(x)=x^2+b$，则由 $f(1)=1+b=4$，得 $b=3$，即 $f(x)=x^2+3$，此时 $f(2)=7$，$f(3)=12$，$f(4)=19$，与表格中的数据相差太大，不符合. 若模型为 $f(x)=ax+b$，则由已知得 $\begin{cases}a+b=4,\\ 3a+b=7,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1.5,\\ b=2.5,\end{cases}$ 所以 $f(x)=1.5x+2.5$，经验证 $f(2)=5.5$，$f(4)=8.5$，与表格中的数据相差不大，符合. 故填③.

12. 53 【解析】由题意得 $\begin{cases}\frac{1}{6}=k\cdot a^{10},\\ \frac{1}{12}=k\cdot a^{20},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{10}},\\ k=\frac{1}{3},\end{cases}$ 所以 $c=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}}$. 当 $c=\frac{1}{120}$ 时，得 $\frac{1}{120}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}}$，即 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}}=\frac{1}{40}$，两边取对数得 $\frac{t}{10}=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{40}=\log_2 40=3+\log_2 5\approx 3+2.32=5.32$，所以 $t\approx 5.32\times 10=53.2\approx 53$，所以大约需要 53 年.

13. **解**：(1)① $(\lg 2)^2+\lg 5\times\lg 20+\lg 0.1=(\lg 2)^2+\lg 5\times\lg(10\times 2)+\lg 10^{-1}=(\lg 2)^2+\lg 5+\lg 5\lg 2-1=(\lg 2+\lg 5)\lg 2+\lg 5-1=\lg 2+\lg 5-1=1-1=0$.

② $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 5}+\log_3 5\times\log_5 9-0.027^{-\frac{1}{3}}=2^{\log_2 5^{-1}}+\log_3 9-(0.3^3)^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{5}+2-0.3^{-1}=\frac{1}{5}+2-\frac{10}{3}=-\frac{17}{15}$.

(2)因为 $\lg\frac{27}{49}=\lg 27-\lg 49=\lg 3^3-\lg 7^2=3\lg 3-2\lg 7$，而 $\lg 3=a$，$\lg 7=b$，所以 $\lg\frac{27}{49}=3a-2b$.

14. **解**：(1)点 $P(3,-1)$ 关于直线 $x=2$ 的对称点 Q 的坐标为 $(1,-1)$，

$\therefore\begin{cases}f(8)=2,\\ f(1)=-1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}m+\log_a 8=2,\\ m+\log_a 1=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=-1,\\ a=2,\end{cases}$

故函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=-1+\log_2 x$.

(2)由(1)知，$g(x)=2f(x)-f(x-1)=2(-1+\log_2 x)-[-1+\log_2(x-1)]=\log_2\frac{x^2}{x-1}-1(x>1)$，

$\because\frac{x^2}{x-1}=\frac{(x-1)^2+2(x-1)+1}{x-1}=(x-1)+\frac{1}{x-1}+2\geqslant 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{1}{x-1}}+2=4$，当且仅当 $x-1=\frac{1}{x-1}$，即 $x=2$ 时，等号成立，函数 $y=\log_2 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore\log_2\frac{x^2}{x-1}-1\geqslant\log_2 4-1=1$，

故当 $x=2$ 时，函数 $g(x)$ 取得最小值 1.

15. **解**：(1)根据题意可得 $f(0)=0$.

因为 $f(x)$ 是定义在 $(-1,1)$ 上的奇函数，

所以 $f(-x)=\log_a\frac{1+bx}{-x+1}=-f(x)=-\log_a\frac{1-bx}{x+1}=\log_a\frac{x+1}{1-bx}$，解得 $b=1$.

(2)由(1)可知，$f(x)=\log_a\frac{1-x}{x+1}=\log_a\frac{-x-1+2}{x+1}=\log_a\left(-1+\frac{2}{x+1}\right)(a>0,a\neq 1)$，

易知函数 $y=-1+\frac{2}{x+1}$ 在 $(-1,1)$ 上单调递减.

当 $0<a<1$ 时，由复合函数的单调性可知 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递增，

因为 $f(t^2-1)+f(t-1)>0$，

所以 $f(t^2-1)>-f(t-1)=f(1-t)$，

则 $\begin{cases}t^2-1>1-t,\\ -1<t^2-1<1,\\ -1<1-t<1,\end{cases}$ 解得 $1<t<\sqrt{2}$；

当 $a>1$ 时，由复合函数的单调性可知 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递减，

因为 $f(t^2-1)+f(t-1)>0$，

所以 $f(t^2-1)>-f(t-1)=f(1-t)$，

则 $\begin{cases}t^2-1<1-t,\\ -1<t^2-1<1,\\ -1<1-t<1,\end{cases}$ 解得 $0<t<1$.

综上，当 $0<a<1$ 时，t 的取值范围是 $1<t<\sqrt{2}$；

当 $a>1$ 时，t 的取值范围是 $0<t<1$.

4.5 函数的应用(二)

4.5.1 函数的零点与方程的解

1. B 【解析】令 $-x^2+5x-6=0$，解得 $x=2$ 或 $x=3$，故函数 $f(x)$ 的零点是 2，3，故选 B.

2. C 【解析】因为函数 $y=\ln x$，$y=2x-3$ 在 $(0,+\infty)$ 上均单调递增，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 因为 $f(1)=-1<0$，$f\left(\frac{3}{2}\right)=\ln\frac{3}{2}>0$，所以 $f(1)\cdot f\left(\frac{3}{2}\right)<0$，所以函数 $f(x)=\ln x+2x-3$ 的零点所在的区间是 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$. 故选 C.

3. C 【解析】因为 $f(x)$ 是定义在 $[-2,6]$ 上的减函数，且 $f(0)>0$，$f(3)<0$，所以 $f(x)$ 的零点必在区间 $(0,3)$ 内，所以 $f(x)$ 的零点可能为 2. 故选 C.

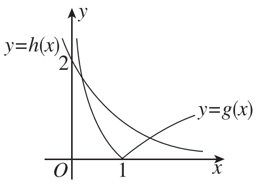
4. D 【解析】由题知 x_1，x_2 是方程 $6x^2-x-2=0$ 的两个根，所以 $x_1+x_2=\frac{1}{6}$，$x_1x_2=-\frac{1}{3}$，则 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\frac{1}{2}$，故选 D.

5. D 【解析】对于 A，因为函数 $y=f(x)$ 是 **R** 上的增函数，所以 $f(0)<f(1)=-0.24<0$，A 中说法正确；对于 B，因为函数 $y=f(x)$ 是 **R** 上的增函数，所以当 $x>2$ 时，$f(x)>f(2)=1.21>0$，B 中说法正确；对于 C，因为函数 $y=f(x)$ 是 **R** 上的增函数，$f(1)<0$ 且 $f(2)>0$，即 $f(1)f(2)<0$，所以函数 $f(x)$ 有且仅有一个零点，且该零点所在区间为 $(1,2)$，C

中说法正确;对于 D,因为函数 $g(x)=f(x)+x$ 连续,且 $g(0)=f(0)<f(1)<0$,$g(1)=f(1)+1>0$,即 $g(0)g(1)<0$,所以函数 $g(x)=f(x)+x$ 在区间$(0,1)$上一定存在零点,D 中说法错误. 故选 D.

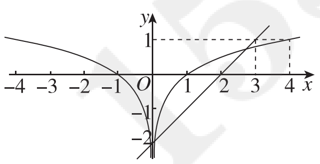
6. D **[解析]** 由题可知 $f(x)$,$g(x)$ 均为增函数,∵ 函数 $f(x)=e^x+x-2$ 的零点为 a,$f(0)=-1<0$,$f(1)=e-1>0$,∴$0<a<1$. ∵ 函数 $g(x)=\ln x+x-2$ 的零点为 b,$g(1)=-1<0$,$g(2)=\ln 2>0$,∴$1<b<2$. 综上可得,$0<a<1<b<2$. ∵函数 $f(x)=e^x+x-2$ 在$(0,+\infty)$上单调递增,∴$f(a)<f(1)<f(b)$,故选 D.

7. C **[解析]** 令 $f(x)=0$,得 $e^x|\ln x|-2=0$,即 $|\ln x|=2\left(\frac{1}{e}\right)^x$,令 $g(x)=|\ln x|$,$h(x)=2\left(\frac{1}{e}\right)^x$,则 $g(x)$,$h(x)$的图象如图所示,由图可知,$g(x)$与 $h(x)$的图象有 2 个交点,即 $f(x)=e^x|\ln x|-2$ 有 2 个零点. 故选 C.



8. AD **[解析]** 因为 $y=-x^2$ 与 $y=\ln x$ 的图象有且仅有一个交点,所以$-x^2=\ln x$ 有且仅有一个根,所以 $f(x)=x^2+\ln x$ 有且仅有一个零点,故 A 正确;因为 $f(x)$的图象是一条连续的曲线,且 $f(0)\cdot f(1)>0$,所以不能确定 $f(x)$在$(0,1)$内零点的情况,故 B 错误;若 $f(x)$的图象是一条连续的曲线,且 $f(0)\cdot f(1)<0$,则由函数零点存在定理知,$f(x)$在$(0,1)$上至少有一个零点,故 C 错误;若 $f(x)$的图象是一条连续的曲线,且 $f(0)\cdot f(1)\leqslant 0$,则由函数零点存在定理知,$f(x)$在$[0,1]$上有零点,故 D 正确. 故选 AD.

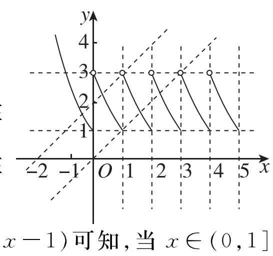
9. ABC **[解析]** 令 $f(x)=x-2-\log_4|x|=0$,可得 $x-2=\log_4|x|$,所以函数 $f(x)=x-2-\log_4|x|$的零点所在区间等价于函数 $y=x-2$ 与 $y=\log_4|x|$图象的交点横坐标所在的区间,作出 $y=x-2$ 与 $y=\log_4|x|$的图象如图所示. 由图可知函数 $y=x-2$ 与 $y=\log_4 x$ 图象的三个交点的横坐标分别位于区间$(-1,0)$,$(0,1)$,$(2,3)$内,所以函数 $f(x)=x-2-\log_4|x|$的零点所在的区间可能为$(-1,0)$,$(0,1)$,$(2,3)$. 故选 ABC.



10. 1 **[解析]** 令 $f(x)=4^x-2^x-2=(2^x-2)(2^x+1)=0$,得 $2^x=2$,即 $x=1$.

11. 2 **[解析]** 当 $x\leqslant 0$ 时,由 $x^2-2=0$,可得 $x=-\sqrt{2}$,当 $x>0$ 时,由 $\ln x=0$,可得 $x=1$,所以函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2,x\leqslant 0,\\ \ln x,x>0\end{cases}$的零点个数是 2.

12. $a<2$ **[解析]** 作出函数 $y=f(x)$的图象如图. 当 $x\leqslant 0$ 时,$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$,则 $f(x)$ 在$(-\infty,0]$上单调递减,且 $f(x)$在$(-\infty,0]$上的取值范围为$[1,+\infty)$;当 $x>0$ 时,由 $f(x)=f(x-1)$可知,当 $x\in(0,1]$时,$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$. 结合函数的图象可知,当 $a<2$ 时,$y=f(x)$与 $y=x+a$ 的图象有且仅有三个交点,所以若关于 x 的方程 $f(x)=x+a$ 有且仅有三个不同的解,则 a 的取值范围是$a<2$.

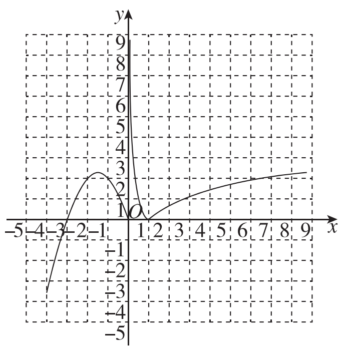


13. **解:**(1)解方程 $x^2+7x+6=0$,得 $x=-1$ 或 $x=-6$,所以函数的零点是-1,-6.
(2)解方程 $1-\log_2(x+3)=0$,得 $x=-1$,所以函数的零点是-1.
(3)解方程 $2^{x-1}-3=0$,得 $x=\log_2 6$,所以函数的零点是 $\log_2 6$.
(4)解方程$\frac{x^2+4x-12}{x-2}=0$,得 $x=-6$,所以函数的零点是-6.

14. **解:**(1)因为函数 $f(x)$满足 $f(2x-1)=4x^2-2x+3=(2x-1)^2+2x-1+3$,
所以函数 $f(x)$的解析式为 $f(x)=x^2+x+3$.
(2)由 $f(x)=x^2+x+3=(1-2m)x+2-2m$,整理得 $x^2+2mx+1+2m=0$,
设 $g(x)=x^2+2mx+1+2m$,由二次函数的图象与性质,可得$\begin{cases}g(-1)=2>0,\\ g(0)=1+2m<0,\\ g(3)=8m+10>0,\\ g(2)=5+6m<0,\end{cases}$解得$-\frac{5}{4}<m<-\frac{5}{6}$,
故实数 m 的取值范围为$\left(-\frac{5}{4},-\frac{5}{6}\right)$.

15. AD **[解析]** 对于 A,令 $f(x)=0$,数形结合可知,$x=b$ 或 $x=0$ 或 $x=-b$,因为 $a>b>0$,所以 $b\in[-a,a]$,$-b\in[-a,a]$,数形结合可知 $g(x)=b$,$g(x)=0$,$g(x)=-b$ 都有一个解,故方程 $f[g(x)]=0$ 有且仅有三个解,A 正确. 对于 B,令 $g(x)=0$,数形结合可知,$x=b$,令 $f(x)=b$,因为 $a>b>c>0$,所以数形结合可知,该方程有一个解,故方程 $g[f(x)]=0$ 有且仅有一个解,故 B 错误. 对于 C,令 $f(x)=0$,数形结合可知,$x=b$ 或 $x=0$ 或 $x=-b$,由题可知,$a>b>c>0$,则 $0>-c>-b>-a$,数形结合可知,$f(x)=b$,$f(x)=-b$ 各有一个解,$f(x)=0$ 有三个解,故方程 $f[f(x)]=0$ 有且仅有五个解,故 C 错误. 对于 D,令 $g(x)=0$,数形结合可知,$x=b$,令 $g(x)=b$,又 $a>b>0$,数形结合可知,该方程有一个解,故方程 $g[g(x)]=0$ 有且仅有一个解,故 D 正确. 故选 AD.

16. **解:**(1)函数 $f(x)$的图象如图所示.



(2) 在方程 $4[f(x)]^2-13f(x)+9=0$ 中,令 $t=f(x)$,则

$4t^2-13t+9=(t-1)(4t-9)=0$,解得 $t=1$ 或 $t=\frac{9}{4}$,

即 $f(x)=1$ 或 $f(x)=\frac{9}{4}$.

由 $f(x)$ 的图象可知,直线 $y=\frac{9}{4}$ 与 $f(x)$ 的图象有 3 个公共点,即 $f(x)=\frac{9}{4}$ 有 3 个不同的实数解;直线 $y=1$ 与 $f(x)$ 的图象有 4 个公共点,即 $f(x)=1$ 有 4 个不同的实数解.

综上所述,函数 $y=4[f(x)]^2-13f(x)+9$ 的零点个数为 $3+4=7$.

4.5.2 用二分法求方程的近似解

1. B **【解析】** 函数 $f(x)$ 在区间 $(1,1.5)$ 内的零点两侧函数值同号,因此不能用二分法求该区间上函数的零点.
2. C **【解析】** $f(x)=\lg x+x-3$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,因为 $f(1)=\lg 1+1-3=-2<0$,$f(2)=\lg 2+2-3=\lg\frac{1}{5}<0$,$f(3)=\lg 3+3-3=\lg 3>0$,$f(4)=\lg 4+4-3>0$,所以 $f(2)\cdot f(3)<0$,根据函数零点存在定理知,可以取的初始区间为 $(2,3)$,故选 C.
3. B **【解析】** 根据精确度的定义可知选 B.
4. B **【解析】** 函数 $f(x)$ 在定义域上是增函数,根据表中数据知,函数 $f(x)$ 的零点在区间 $(0.562\,5,0.625)$ 内,$\because |0.625-0.562\,5|=0.062\,5<0.1$,$\therefore f(x)$ 的零点的近似值可取为 0.57.故选 B.
5. C **【解析】** 因为每等分一次,零点所在区间的长度变为原来的 $\frac{1}{2}$,所以等分 n 次后,零点所在区间的长度变为原来的 $\frac{1}{2^n}$,则由题可得 $\frac{1}{2^n}<0.01$,即 $2^n>100>2^6$,所以 $n>6$,则至少等分的次数为 7.故选 C.
6. CD **【解析】** 易知选项 A,B 中的函数有零点,且可用二分法求零点的近似值;对于选项 C,$y=\frac{1}{2}x^2+4x+8=\frac{1}{2}(x+4)^2\geqslant 0$,该函数有零点,但不能用二分法求零点的近似值;对于选项 D,$y=|x|\geqslant 0$,该函数有零点,但不能用二分法求零点的近似值.故选 CD.
7. BCD **【解析】** $\because y=2^x$ 与 $y=3x-7$ 都是 $\mathbf{R}$ 上的增函数,$\therefore f(x)=2^x+3x-7$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数,$\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上至多有一个零点,由表格中的数据可知 $f(1.421\,875)<0$,$f(1.437\,5)>0$,$\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有唯一零点,零点所在的区间为 $(1.421\,875,1.437\,5)$,$\therefore h<0$,A 错误;方程 $2^x+3x-7=0$ 有实数解,B 正确;$f(1.375)<0$,$f(1.437\,5)>0$,$\because 1.437\,5-1.375=0.062\,5<0.1$,$\therefore$ 若精确度为 0.1,则近似解可取为 1.375,C 正确;$f(1.429\,687\,5)<0$,$f(1.437\,5)>0$,$\because 1.437\,5-1.429\,687\,5=0.007\,812\,5<0.01$,$\therefore$ 若精确度为 0.01,则近似解可取为 1.437 5,D 正确.故选 BCD.
8. $\frac{3}{4}$ **【解析】** 令 $f(x)=2x^3+3x-3$,$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数,则 $f(0)=-3<0$,$f(1)=2+3-3=2>0$,所以第一次所取区间的中点 $x_1=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$,又 $f\left(\frac{1}{2}\right)=2\times\frac{1}{8}+3\times\frac{1}{2}-3=-\frac{5}{4}<0$,所以 $x_2=\frac{\frac{1}{2}+1}{2}=\frac{3}{4}$.
9. $\left(2,\frac{5}{2}\right)$ **【解析】** $\because$ 零点所在的初始区间为 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$,$\therefore f\left(\frac{1}{4}\right)f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(-2+a-\frac{1}{2}\right)(-1+a-1)<0$,解得 $2<a<\frac{5}{2}$.
10. $\frac{4}{3}$ **【解析】** 因为依次确定了零点所在区间为 $[a,b]$,$\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$,$\left[a+\frac{1}{3},\frac{b}{3}\right]$,所以 $\frac{\frac{a+b}{2}+a}{2}=a+\frac{1}{3}$,得 $b-a=\frac{4}{3}$.
11. **解:** 设函数 $f(x)=2^x+3x-6$,则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数,方程 $6-3x=2^x$ 的解为 x_0,
    则 $x_0\in(1,2)$,$\because f(1)=-1<0$,$f(2)=4>0$,$f(1.5)\approx 1.33>0$,$\therefore f(1)\cdot f(1.5)<0$,$\therefore x_0\in(1,1.5)$.
    $\because f(1.25)\approx 0.13>0$,$\therefore f(1)\cdot f(1.25)<0$,
    $\therefore x_0\in(1,1.25)$.$\because f(1.125)\approx -0.445<0$,
    $\therefore f(1.125)\cdot f(1.25)<0$,$\therefore x_0\in(1.125,1.25)$.
    $\because f(1.187\,5)=-0.157\,5<0$,$\therefore f(1.187\,5)\cdot f(1.25)<0$,$\therefore x_0\in(1.187\,5,1.25)$.
    $\because |1.25-1.187\,5|=0.062\,5<0.1$,$\therefore$ 方程 $6-3x=2^x$ 在区间 $(1,2)$ 内的近似解可以为 1.2.
12. -1 或 -0.8 **【解析】** 设 $f(x)=2^x-x^2$,易知 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增,由表格知 $f(-0.8)<0$,$f(-0.6)>0$,所以 $f(-0.8)f(-0.6)<0$,所以函数 $f(x)$ 的一个零点在 $(-0.8,-0.6)$ 内,又方程的一个根位于 $(a,a+0.4)$ 内,所以当 $a=-1$ 时,$(-0.8,-0.6)\subsetneqq(-1,-0.6)$,当 $a=-0.8$ 时,$(-0.8,-0.6)\subsetneqq(-0.8,-0.4)$,故 a 的值是 -1 或 -0.8.
13. **解:**(1)函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增,证明如下:
    令 $0\leqslant x_1<x_2$,$\because f(x_1)-f(x_2)=\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}=\frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}<0$,$\therefore f(x_1)<f(x_2)$,
    故函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增.
    (2)易知 $g(x)=\sqrt{x}+\log_2 x-2$ 是定义域内的增函数,
    $\because g(1)=1+\log_2 1-2=-1<0$,$g(2)=\sqrt{2}+\log_2 2-2=\sqrt{2}-1>0$,$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内有且只有一个零点.
    $\because g(1.5)=\sqrt{1.5}+\log_2 1.5-2\approx 1.225+0.585-2=-0.19<0$,$g(1.75)=\sqrt{1.75}+\log_2 1.75-2\approx 1.323+0.807-2=0.13>0$,
    $\therefore$ 函数 $g(x)$ 的零点在 $(1.5,1.75)$ 内,
    又 $1.75-1.5=0.25<0.3$,$\therefore g(x)$ 零点的近似值可取为 1.5(函数 $g(x)$ 零点的近似值取区间 $[1.5,1.75]$ 内的任意一个数都可以).

4.5.3 函数模型的应用

1. C **【解析】** 由本金为 100 000 元,一年期的存款利率为 1.75%,得 1 年后的本息为 $100\,000\times(1+1.75\%)$,2 年后的本息为 $100\,000\times(1+1.75\%)^2$,…,10 年后的本息为 $100\,000\times(1+1.75\%)^{10}$,则到 2030 年初可获得的利息为 $100\,000\times(1+1.75\%)^{10}-100\,000\approx 18\,944$(元),该计算实质

采用的是指数函数模型.故选C.

2. C 【解析】由散点图知指数函数模型最符合.

3. D 【解析】由题得 $\begin{cases}216=e^{6a+b},\\8=e^{24a+b},\end{cases}$ 则 $e^{18a}=\frac{1}{27}$,故 $a=-\frac{\ln 3}{6}$,$b=4\ln 3+3\ln 2$,所以当 $x=12$ 时,$ax+b=-2\ln 3+4\ln 3+3\ln 2=\ln 72$,此时 $y=e^{\ln 72}=72$.故选D.

4. B 【解析】当 $t=0$ 时,$y=0.05+\lambda=0.2$,解得 $\lambda=0.15$,所以 $y=0.05+0.15e^{-\frac{t}{10}}$,由 $0.05+0.15e^{-\frac{t}{10}}\leqslant 0.1$,解得 $t\geqslant 10\ln 3\approx 11$,所以至少需要11分钟.故选B.

5. B 【解析】设该遗址距离今天 x_0 年,则 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x_0}{5730}}=\frac{3}{4}$,所以 $\frac{x_0}{5730}=\log_{\frac{1}{2}}\frac{3}{4}=\log_2\frac{4}{3}=\log_2 4-\log_2 3=2-\frac{\ln 3}{\ln 2}\approx 2-\frac{1.1}{0.7}=2-\frac{11}{7}$,所以 $x_0\approx 5730\times\left(2-\frac{11}{7}\right)\approx 2456$,即该遗址距离今天大约2456年.故选B.

6. C 【解析】由题可得 $\begin{cases}\frac{1}{2}=k\cdot a^{2022-2021},\\1=k\cdot a^{2023-2021},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\k=\frac{1}{4},\end{cases}$ 所以 $y=\frac{1}{4}\cdot 2^{x-2021}$,当 $x=2024$ 时,$y=\frac{1}{4}\times 2^{2024-2021}=2$.故选C.

7. BD 【解析】由题意,函数图象过点(1,1)和点(2,3),则 $\begin{cases}ka=1,\\ka^2=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=3,\\k=\frac{1}{3},\end{cases}$ 所以 $y=\frac{1}{3}\cdot 3^t=3^{t-1}$.由图易知浮萍每月增加的面积不相等,故A不正确;当 $x=4$ 时,$y=3^3=27$,浮萍面积超过了25 m^2,故B正确;当 $x=5$ 时,$y=3^4=81$,所以浮萍面积蔓延到81 m^2 只需5个月,故C不正确;令 $y=10$,可得 $t_1=\log_3 10+1$,令 $y=20$,可得 $t_2=\log_3 20+1$,令 $y=40$,可得 $t_3=\log_3 40+1$,所以 $t_1+t_3=\log_3 10+1+\log_3 40+1=\log_3 400+2=2\log_3 20+2=2(\log_3 20+1)=2t_2$,故D正确.故选BD.

8. ① 【解析】对于①,当 $x=3$ 时,$y=3^2+1=10$;对于②,当 $x=3$ 时,$y=8$.因为10比8更接近10.2,所以选用①作为函数模型较好.

9. 25 【解析】设 $\frac{v}{r^4}=k(k>0)$,把 $v=400$,$r=3$ 代入得 $k=\frac{400}{81}$.当 $r=\frac{3}{2}$ 时,$v=k\cdot r^4=\frac{400}{81}\times\left(\frac{3}{2}\right)^4=25$.

10. 12 【解析】设原来的森林面积为 $m(m>0)$,森林面积的年增长率为 a,则 $m(1+a)^5=2m$,可得 $1+a=2^{\frac{1}{5}}$.设植树造林 x 年后,森林面积变为原来的5倍以上,则 $m(1+a)^x>5m$,即 $(2^{\frac{1}{5}})^x>5$,则有 $x>\log_{2^{\frac{1}{5}}}5=\frac{\lg 5}{\lg 2^{\frac{1}{5}}}=\frac{1-\lg 2}{\frac{1}{5}\lg 2}=\frac{5}{\lg 2}-5\approx\frac{5}{0.301}-5\approx 11.6$,所以为使森林面积变为原来的5倍以上,至少需要植树造林12年.

11. 解:(1)由已知得 $v=300\ln 800\approx 300\times 6.7=2010(m/s)$.
(2)设在材料更新和技术改进前"总质比"为 k,
则 $600\ln\left(\frac{1}{2}k\right)-300\ln k\geqslant 300$,化简得 $\ln\left(\frac{1}{4}k\right)\geqslant 1$,则 $k\geqslant 4e$.
因为 $2.718<e<2.719$,所以 $10.872<4e<10.876$,所以 k 的最小整数值是11,故在材料更新和技术改进前"总质比"的最小整数值为11.

12. 解:(1)$y=na^x(n>0,a>1)$,$y=px^{\frac{1}{2}}+n(p>0,n>0)$ 都在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.
随着 x 的增大,$y=na^x(n>0,a>1)$ 的增长速度越来越快,而 $y=px^{\frac{1}{2}}+n(p>0,n>0)$ 的增长速度越来越慢,
所以函数模型 $y=na^x(n>0,a>1)$ 更适合.
由题意知 $\begin{cases}na^2=24,\\na^3=64,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{8}{3},\\n=\frac{27}{8},\end{cases}$ 所以 y 关于 x 的函数解析式为 $y=\frac{27}{8}\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^x$.
(2)由 $\frac{27}{8}\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^x>60\times\frac{27}{8}$,解得 $x>\log_{\frac{8}{3}}60$,
因为 $\log_{\frac{8}{3}}60=\frac{\lg 60}{\lg\frac{8}{3}}=\frac{1+\lg 2+\lg 3}{3\lg 2-\lg 3}\approx\frac{1.7781}{0.4259}\approx 4.2$,
所以 $x\geqslant 5$,所以该水域中水葫芦的生长面积在5月底起是最初测量时其生长面积的60倍以上.

滚动习题(八)

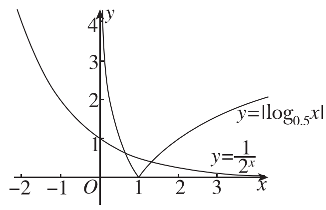
1. A 【解析】令 $x^2-2x-3=0$,解得 $x=3$ 或 -1,故 $y=x^2-2x-3$ 的零点为 -1,3.故选A.

2. A 【解析】函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的图象是一条连续不断的曲线,由零点存在定理得,当 $f(a)\cdot f(b)<0$ 时,函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内至少有一个零点,充分性成立;当函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内至少有一个零点时,$f(a)\cdot f(b)<0$ 不一定成立,如函数 $y=x^2$ 在开区间 $(-1,1)$ 内有零点 $x=0$,但 $f(-1)\cdot f(1)>0$,必要性不成立.则"$f(a)\cdot f(b)<0$"是"函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内至少有一个零点"的充分不必要条件.故选A.

3. C 【解析】当 $r=5$ 时,$\Delta L=10\lg\frac{25\pi}{4}$,当 $r=80$ 时,$\Delta L=10\lg(1600\pi)$,则衰减量的增加值为 $10\lg(1600\pi)-10\lg\frac{25\pi}{4}=80\lg 2=80(\lg 10-\lg 5)\approx 80\times(1-0.7)=24(dB)$.故选C.

4. D 【解析】当 $x>0$ 时,$f(x)=3x-1$ 有一个零点为 $\frac{1}{3}$,因此,当 $x\leqslant 0$ 时,$f(x)=e^x+a$ 有一个零点.由 $e^x+a=0(x\leqslant 0)$,得 $a=-e^x(x\leqslant 0)$,所以函数 $y=-e^x$ 在 $(-\infty,0]$ 上的图象与直线 $y=a$ 有一个交点,则 $-1\leqslant a<0$.故选D.

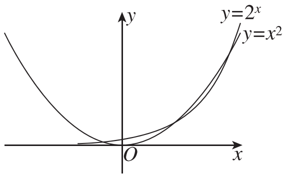
5. B 【解析】令 $f(x)=0$,可得 $|\log_{0.5}x|=\frac{1}{2^x}$,作出函数 $y=|\log_{0.5}x|$ 与 $y=\frac{1}{2^x}$ 的图象如图所示.由图可知两函数的图象有2个交点,所以函数 $f(x)$ 的零点个数为2.故选B.



6. D 【解析】根据题意,$f(a)=a+\ln a=0$,所以 $\ln a=-a$,则 $a=e^{-a}$.因为 $g(b)=e^b+b=0$,所以 $e^b=-b$,则 $b=\ln(-b)$.对比 $e^{-a}=a$ 和 $e^b=-b$,因为 $y=e^x$ 和 $y=-x$ 的图

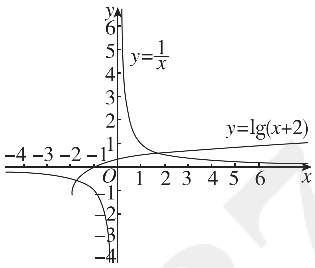
象只有一个交点，所以 $b=-a$，故 $a+b=0$，故选项 A 错误；因为 $y=x$，$y=\ln x$ 在定义域上单调递增，所以 $f(x)=x+\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，若 $0<a<\frac{1}{e}$，则 $f(a)<f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}-1<0$，与 a 是 $f(x)$ 的零点矛盾，故选项 B 错误；若 $ab+b=a(-a)+(-a)>a+1$，则 $-a^2-2a-1>0$，即 $a^2+2a+1<0$，即 $(a+1)^2<0$，显然不成立，故选项 C 错误；因为 $e^b=-b=a=-\ln a$，所以 $e^b+\ln a=0$，故选项 D 正确. 故选 D.

7. BCD 【解析】根据指数函数的性质知，$y=2^x-1$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，令 $y=2^x-1=0$，得 $x=0$，则函数的零点为 0，故 A 错误；因为函数 $f(x)=a^x+x-b$，



$a>1$，$0<b<1$，所以函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数，又 $f(-1)=a^{-1}-1-b<0$，$f(0)=1-b>0$，所以函数 $f(x)=a^x+x-b$ 的零点所在的区间是 $(-1,0)$，故 B 正确；函数 $y=2^x-x^2$ 的零点个数为函数 $y=2^x$ 与 $y=x^2$ 的图象的交点个数，作出两函数的图象如图所示，由图知两函数图象有 3 个交点，故函数 $y=2^x-x^2$ 有 3 个零点，故 C 正确；若函数 $f(x)=2^x-a^2-a(a>0)$ 在 $(-\infty,1]$ 上存在零点，则有 $0<a^2+a\leqslant 2$，可得 $0<a\leqslant 1$，故 D 正确. 故选 BCD.

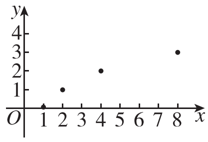
8. AB 【解析】因为 0 不是方程 $x\lg(x+2)=1$ 的实根，所以方程 $x\lg(x+2)=1$ 即为方程 $\lg(x+2)=\frac{1}{x}$，在同一坐标系中作出函数 $y=\lg(x+2)$ 和 $y=\frac{1}{x}$ 的图象如图. 从图



象上可以看出，方程 $\lg(x+2)=\frac{1}{x}$ 在区间 $(-2,-1)$ 和 $(1,2)$ 内各有一个实根. 下面证明方程 $\lg(x+2)=\frac{1}{x}$ 在区间 $(-2,-1)$ 和 $(1,2)$ 内各有一个实根，即证函数 $f(x)=\lg(x+2)-\frac{1}{x}$ 在区间 $(-2,-1)$ 和 $(1,2)$ 内各有一个零点. 易知函数 $f(x)=\lg(x+2)-\frac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 上单调递增，因为 $f(1)=\lg 3-1<0$，$f(2)=\lg 4-\frac{1}{2}=\lg 4-\lg\sqrt{10}>0$，即 $f(1)\cdot f(2)<0$，所以由函数零点存在定理知，函数 $f(x)=\lg(x+2)-\frac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内有一个零点，即方程 $\lg(x+2)=\frac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内有且仅有一个实根. 函数 $f(x)=\lg(x+2)-\frac{1}{x}$ 在区间 $(-2,-1)$ 上单调递增，当 x 趋近于 -2 时，$f(x)<0$，$f(-1)>0$，则函数 $f(x)=\lg(x+2)-\frac{1}{x}$ 在区间 $(-2,-1)$ 内有一个零点，即方程 $\lg(x+2)=\frac{1}{x}$ 在区间 $(-2,-1)$ 内有且仅有一个实根. 综上，方程 $x\lg(x+2)=1$ 在区间 $(-2,-1)$ 和 $(1,2)$ 内各有一个实根，则 k 的值为 -2 或 1. 故选 AB.

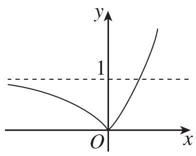
9. 1 $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ 【解析】易知 $f(x)=2^x-\frac{2}{x}$ 在 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 上单调递增，且当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f(x)>0$ 恒成立. 令 $f(x)=0$，可得 $2^x=\frac{2}{x}$，解得 $x=1$，则函数 $f(x)$ 的零点个数为 1. $f(x)>0$ 即为 $2^x>\frac{2}{x}$，解得 $x<0$ 或 $x>1$，即不等式的解集为 $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

10. ① 【解析】根据题中数据画出散点图，如图所示. 图上的点大致分布在函数 $y=\log_2 x$ 的图象附近，故 $y=\log_2 x$ 可以近似地反映这些数据的规律. 故填①.

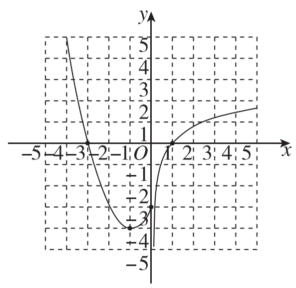


11. 1 4 【解析】$f(x)=\frac{1}{x}-\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数，又 $f(1)=1>0$，$f(2)=\frac{1}{2}-\ln 2<0$，$\therefore x_0\in(1,2)$，故 $n=1$. 设需要等分 n 次，则 $\left(\frac{1}{2}\right)^n\leqslant 0.1$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$，解得 $n\geqslant 4$，故至少需要等分 4 次.

12. $(4,5)$ 【解析】令 $|3^x-1|=t$，作出 $f(x)=|3^x-1|$ 的图象如图. 由图知，当 $t<0$ 时，方程 $|3^x-1|=t$ 无解；当 $t=0$ 或 $t\geqslant 1$ 时，方程 $|3^x-1|=t$ 有 1 个解；当 $0<t<1$ 时，方程 $|3^x-1|=t$ 有 2 个解. 故方程 $g[f(x)]=0$ 有 4 个不相同的实数根，等价于方程 $g(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 上有 2 个不同实根，则 $\begin{cases}\Delta=a^2-16>0,\\0<\frac{a}{8}<1,\\g(1)=4-a+1>0,\end{cases}$ 解得 $4<a<5$，所以实数 a 的取值范围为 $(4,5)$.



13. **解：**(1) 根据函数解析式，分别在 $x\leqslant 0$ 和 $x>0$ 时作出函数的图象，描出关键点 $(-3,0)$，$(-1,-4)$，$(0,-3)$，$(1,0)$，根据函数类型即可画出图象如图所示.



(2) 当 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=k$ 有 3 个交点时，方程 $f(x)=k$ 有 3 个实数解.

由图知，当 $k\in(-4,-3]$ 时，方程 $f(x)=k$ 有 3 个实数解，即 k 的取值范围是 $(-4,-3]$.

14. **解：**(1) 易知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

因为 $f(1)=\ln 1+1-2=-1<0$，$f(2)=\ln 2+2-2=\ln 2>0$，即 $f(1)\cdot f(2)<0$，

所以 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内存在零点 x_0.

取区间 $(1,2)$ 的中点 $x_1=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$，

则 $f\left(\frac{3}{2}\right)=\ln\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-2=\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=\ln\frac{3}{2\sqrt{e}}=$

$\ln\sqrt{\frac{9}{4e}}<0$,因为 $f\left(\frac{3}{2}\right)\cdot f(2)<0$,所以 $x_0\in\left(\frac{3}{2},2\right)$.

再取区间 $\left(\frac{3}{2},2\right)$ 的中点 $x_2=\frac{\frac{3}{2}+2}{2}=\frac{7}{4}$,则 $f\left(\frac{7}{4}\right)=\ln\frac{7}{4}+\frac{7}{4}-2=\ln\frac{7}{4}-\frac{1}{4}=\ln\frac{7}{4\sqrt[4]{e}}=\ln\sqrt[4]{\frac{2401}{256e}}>0$,

因为 $f\left(\frac{3}{2}\right)\cdot f\left(\frac{7}{4}\right)<0$,所以 $x_0\in\left(\frac{3}{2},\frac{7}{4}\right)$.

因为 $\frac{7}{4}-\frac{3}{2}=\frac{1}{4}=0.25<0.5$,所以方程 $f(x)=0$ 的近似解可取为 $\frac{3}{2}=1.5$.

(2)证明:由题意得 $\begin{cases}\ln x_1+x_1=2,\\ e^{x_2}+x_2=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\ln x_1=2-x_1,\\ \ln(-x_2)=x_2,\end{cases}$

故 $\ln x_1+\ln(-x_2)=\ln(-x_1x_2)=2-x_1+x_2$,且 $x_2<0$.

要证 $x_1\cdot x_2>-e$,只需证 $2-x_1+x_2<1$,即证 $x_2<x_1-1$,

由(1)知 $x_1\in\left(\frac{3}{2},\frac{7}{4}\right)$,显然 $x_2<x_1-1$ 成立.

综上,$x_1\cdot x_2>-e$ 得证.

15. 解:(1)由给出的数据知,应选择的函数模型是 $y=a\cdot b^x$ $(a>0,b>0$ 且 $b\neq1)$,

由题意得 $\begin{cases}a\cdot b^0=1500,\\ a\cdot b^1=2250,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1500,\\ b=\frac{3}{2},\end{cases}$

所以 $y=1500\times\left(\frac{3}{2}\right)^x$.

(2)设传统能源汽车保有量每年下降的百分比为 r,依题意得 $50\ 000(1-r)^5=50\ 000\times(1-10\%)$,解得 $1-r=0.9^{\frac{1}{5}}$,

设从 2019 年底起经过 x 年后传统能源汽车保有量为 h 辆,

则有 $h=50\ 000(1-r)^x=50\ 000(0.9^{\frac{1}{5}})^x$.

设估计从 2019 年底起经过 x 年后新能源汽车保有量将超过传统能源汽车保有量,

则有 $1500\times\left(\frac{3}{2}\right)^x>50\ 000(0.9^{\frac{1}{5}})^x$,化简得 $3\times\left(\frac{3}{2}\right)^x>100(0.9^{\frac{1}{5}})^x$,

所以 $\lg 3+x(\lg 3-\lg 2)>2+\frac{x}{5}(2\lg 3-1)$,解得 $x>\dfrac{2-\lg 3}{\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\lg 3-\lg 2}\approx8.09$,

故估计从 2019 年底起经过 9 年后,即 2028 年底新能源汽车的保有量将超过传统能源汽车保有量.

第五章　三角函数

5.1　任意角和弧度制

5.1.1　任意角

1. B **[解析]** $45°$角的终边在第一象限,$90°$角的终边在 y 轴的非负半轴上,$180°$角的终边在 x 轴的非正半轴上,$270°$角的终边在 y 轴的非正半轴上,故选 B.

2. B **[解析]** 因为 $-270°<-200°<-180°$,所以 $-200°$角是第二象限角.

3. B **[解析]** 对于 A,因为 $2183°-(-23°)=2206°$,不是 $360°$的整数倍,所以它们的终边不同,A 错误;对于 B,因为 $2183°-23°=6\times360°$,所以 $2183°$角与 $23°$角的终边相同,B 正确;对于 C,因为 $2183°-(-47°)=2230°$,不是 $360°$的整数倍,所以它们的终边不同,C 错误;对于 D,因为 $2183°-47°=2136°$,不是 $360°$的整数倍,所以它们的终边不同,D 错误.故选 B.

4. C **[解析]** 在 $0°\sim360°$范围内,终边在直线 $y=\sqrt{3}x$ 上的角为 $60°$角和 $240°$角,与 $60°$角终边相同的角为 $k\cdot360°+60°$,$k\in\mathbf{Z}$,与 $240°$角终边相同的角为 $k\cdot360°+240°$,$k\in\mathbf{Z}$,所以终边在直线 $y=\sqrt{3}x$ 上的角 α 可表示为 $\alpha=n\cdot180°+60°$,$n\in\mathbf{Z}$,故角 α 的取值集合是 $\{\alpha|\alpha=n\cdot180°+60°,n\in\mathbf{Z}\}$.故选 C.

5. D **[解析]** 因为 α 为第二象限角,所以 $2n\cdot180°+90°<\alpha<2n\cdot180°+180°$,$n\in\mathbf{Z}$,因此 $(2n+k)\cdot180°+90°<k\cdot180°+\alpha<(2n+k)\cdot180°+180°$,$n,k\in\mathbf{Z}$.而 $2n$ 为偶数,当 k 为奇数时,$2n+k$ 为奇数,则 $k\cdot180°+\alpha(k\in\mathbf{Z})$为第四象限角,当 k 为偶数时,$2n+k$ 为偶数,则 $k\cdot180°+\alpha(k\in\mathbf{Z})$为第二象限角,所以 $k\cdot180°+\alpha(k\in\mathbf{Z})$的终边所在的象限是第二、四象限.故选 D.

6. D **[解析]** 因为 $\alpha=m\cdot360°+60°$,$m\in\mathbf{Z}$,所以角 α 与 $60°$角的终边相同.因为 $\beta=k\cdot360°+120°$,$k\in\mathbf{Z}$,所以角 β 与 $120°$角的终边相同.又 $60°$角与 $120°$角的终边关于 y 轴对称,所以角 α 与 β 的终边关于 y 轴对称,故选 D.

7. ACD **[解析]** 小于 $90°$的角可以是负角,负角不是锐角,故 A 中说法错误;钝角是第二象限角,故 B 中说法正确;第二象限角不一定大于第一象限角,例如 $150°$是第二象限角,$390°$是第一象限角,故 C 中说法错误;若角 α 与角 β 的终边相同,则 $\alpha=\beta+k\cdot360°$,$k\in\mathbf{Z}$,故 D 中说法错误.故选 ACD.

8. ACD **[解析]** 由题意得 $6\alpha=2k\times180°$且 $k\in\mathbf{Z}$,则 $\alpha=\frac{180°k}{3}$,$k\in\mathbf{Z}$,又 $0°<\alpha<360°$,∴当 $k=1$ 时,$\alpha=60°$;当 $k=2$ 时,$\alpha=120°$;当 $k=3$ 时,$\alpha=180°$;当 $k=4$ 时,$\alpha=240°$;当 $k=5$ 时,$\alpha=300°$.故选 ACD.

9. ABD **[解析]** 由 α 是第二象限角,得 $k\cdot360°+90°<\alpha<k\cdot360°+180°$,$k\in\mathbf{Z}$,则 $k\cdot120°+30°<\frac{\alpha}{3}<k\cdot120°+60°$,$k\in\mathbf{Z}$.当 $k=3n$,$n\in\mathbf{Z}$ 时,$n\cdot360°+30°<\frac{\alpha}{3}<n\cdot360°+60°$,$n\in\mathbf{Z}$,则 $\frac{\alpha}{3}$是第一象限角;当 $k=3n+1$,$n\in\mathbf{Z}$ 时,$n\cdot360°+150°<\frac{\alpha}{3}<n\cdot360°+180°$,$n\in\mathbf{Z}$,则 $\frac{\alpha}{3}$是第二象限角;当 $k=3n+2$,$n\in\mathbf{Z}$ 时,$n\cdot360°+270°<\frac{\alpha}{3}<n\cdot360°+300°$,$n\in\mathbf{Z}$,则 $\frac{\alpha}{3}$是第四象限角.综上可得,$\frac{\alpha}{3}$的终边所在位置可能是第一、第二或第四象限,故选 ABD.

10. $-480°$ **[解析]** 时针走过了 1 小时 20 分钟,则分针转了 $\frac{4}{3}$圈,又因为按顺时针方向旋转形成的角为负角,所以分针转

过的角度为$-\frac{4}{3}\times360°=-480°$.

11. $-1055°$或$-695°$ **【解析】** 与$25°$角终边相同的角的集合为$S=\{\beta|\beta=k\cdot360°+25°,k\in\mathbf{Z}\}$.令$k=-3$,则有$\beta=-3\times360°+25°=-1055°$,符合条件;令$k=-2$,则有$\beta=-2\times360°+25°=-695°$,符合条件;令$k=-1$,则有$\beta=-1\times360°+25°=-335°$,不符合条件.故符合条件的角$\beta=-1055°$或$-695°$.

12. $120°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$ **【解析】** 设$\alpha=-30°$的终边为射线OA(O为坐标原点),射线OB与射线OA关于直线$y=x$对称,则终边在射线OB上的最小正角为$120°$,故$\beta=120°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$.

13. **解:**(1)$\because -2024°=-6\times360°+136°$,$\therefore$与$-2024°$角终边相同的最小正角是$136°$.

(2)$\because -2024°=-5\times360°+(-224°)$,$\therefore$与$-2024°$角终边相同的最大负角是$-224°$.

(3)$\because -2024°=-6\times360°+136°$,$\therefore$与$-2024°$角的终边相同也就是与$136°$角的终边相同.

由$-720°\leqslant k\cdot360°+136°<720°,k\in\mathbf{Z}$,可得$k=-2,-1,0,1$,代入$k\cdot360°+136°$依次得$-584°,-224°,136°,496°$.

14. **解:**(1)终边在直线$y=x$上的角构成的集合$S=\{\alpha|\alpha=45°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|\alpha=225°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha|\alpha=45°+n\cdot180°,n\in\mathbf{Z}\}$.

$M=\{45°,225°,405°,585°,765°,945°\}$.

(2)终边在$30°$角的终边所在直线上的角的集合为$S_1=\{\alpha|\alpha=30°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$,

终边在$180°-75°=105°$角的终边所在直线上的角的集合为$S_2=\{\alpha|\alpha=105°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$,

因此终边在题图中的阴影区域内的角α的取值范围是$30°+k\cdot180°\leqslant\alpha<105°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}$,

所以角$\frac{\alpha}{2}$的取值范围是$15°+k\cdot90°\leqslant\frac{\alpha}{2}<52.5°+k\cdot90°$,$k\in\mathbf{Z}$.

15. C **【解析】** 由题意得$M=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{k}{2}\times180°+45°,k\in\mathbf{Z}\right\}=\{x|x=(2k+1)\times45°,k\in\mathbf{Z}\}$,$N=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{k}{4}\times180°+45°,k\in\mathbf{Z}\right\}=\{x|x=(k+1)\times45°,k\in\mathbf{Z}\}$,所以$M\subseteq N$.故选C.

16. **解:**由题意得$\begin{cases}0°<\theta<180°,\\180°<2\theta<270°,\\15\theta=k\cdot360°(k\in\mathbf{Z}),\end{cases}$ 即$\begin{cases}90°<\theta<135°,\\\theta=k\cdot24°(k\in\mathbf{Z}),\end{cases}$

解得$\theta=96°$或$120°$.

5.1.2 弧度制

1. B **【解析】** 依题意,$40°$角的弧度数为$40\times\frac{\pi}{180}=\frac{2\pi}{9}$.故选B.

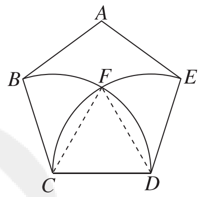
2. C **【解析】** $\alpha=-2\text{ rad}\approx-2\times57.30°=-114.6°$,故角$\alpha$的终边在第三象限,故选C.

3. D **【解析】** 由扇形的弧长是6,半径为2,得该扇形的圆心角的弧度数是$\frac{6}{2}=3$.故选D.

4. B **【解析】** 因为$\frac{7}{4}\pi\text{ rad}=315°$,其终边落在第四象限,且与$-45°$角的终边相同,所以与$\frac{7\pi}{4}$角的终边相同的角的集合$S=\{\alpha|\alpha=315°+k\cdot360°\}=\{\alpha|\alpha=-45°+k\cdot360°\}(k\in\mathbf{Z})$,选项B正确;选项A,C书写不规范,选项D表示的角的终边在第三象限.故选B.

5. B **【解析】** 设扇形的半径为r cm,因为扇形的圆心角$\alpha=2$ rad,扇形的周长为8 cm,所以$2r+2r=8$,解得$r=2$,所以此扇形的面积$S=\frac{1}{2}\alpha r^2=\frac{1}{2}\times2\times2^2=4(\text{cm}^2)$.故选B.

6. A **【解析】** 如图,连接CF,DF,由题意得$\triangle CDF$为等边三角形,所以$\angle CDF=\frac{\pi}{3}$,又$\angle BCD=\frac{(5-2)\pi}{5}=\frac{3\pi}{5}$,所以$\angle BCF=\angle BCD-\angle FCD=\frac{3\pi}{5}-\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{15}$,所以$\overset{\frown}{BF}$的长为$\frac{4\pi}{15}\times3=\frac{4\pi}{5}$.故选A.



7. C **【解析】** 由题意,动点M,N第三次相遇时,两个动点转过的弧长之和为$3\times2\pi=6\pi$.设从点$P(1,0)$出发t秒后点M,N第三次相遇,则$\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{3}t=6\pi$,解得$t=12$,此时点$M$转过的弧度数为$\frac{\pi}{6}\times12=2\pi$.故选C.

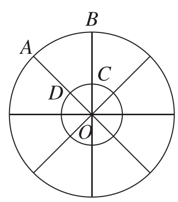
8. ABD **【解析】** 由题意得$l=\alpha r,S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\alpha r^2,L=l+2r$.若$\alpha,r$确定,则$l$确定,则$L,S$唯一确定,故A正确;若$\alpha,l$确定,则$r$确定,则$L,S$唯一确定,故B正确;若$S,L$确定,则$\begin{cases}L=l+2r=\alpha r+2r,\\S=\frac{1}{2}\alpha r^2,\end{cases}$ 则α,r不一定唯一确定,故C错误;若S,l确定,则r确定,则α唯一确定,故D正确.故选ABD.

9. ACD **【解析】** 设圆形的半径为R,则$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}\alpha_1R^2}{\frac{1}{2}\alpha_2R^2}=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,故D正确;因为$\alpha_1+\alpha_2=2\pi$,所以$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\alpha_2+\alpha_2=2\pi$,解得$\alpha_2=(\sqrt{5}-1)\pi$,故C正确;由$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618$,得$\sqrt{5}-1\approx1.236$,所以$\alpha_2=(\sqrt{5}-1)\pi\approx1.236\times180°\approx222.5°$,所以$\alpha_1\approx360°-222.5°=137.5°$,故A正确,B错误.故选ACD.

10. -3π **【解析】** 考试时长为1.5小时,分针按顺时针方向转了1.5圈,所以分针转过的弧度数为$-2\pi\times1.5=-3\pi$.

11. $\frac{4\pi}{5}$ **【解析】** $-\frac{2024\pi}{5}=-404\pi-\frac{4\pi}{5}=-406\pi+\frac{6\pi}{5}$,$\because\left|-\frac{4\pi}{5}\right|<\left|\frac{6\pi}{5}\right|$,$\therefore$使$|\theta|$最小的$\theta$的值是$\frac{4\pi}{5}$.

12. $\frac{189\pi}{2}\text{ cm}^2$ **【解析】** 如图,设小圆的圆心为O,则$OC=OD=12$ cm,设$OA=OB=R$,又每个扇环形小拼盘对应的圆心角为$\alpha=\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$,则$\overset{\frown}{AB}$的长为$\alpha R=\frac{15\pi}{2}$ cm,



解得 $R=30\ \text{cm}$,所以每个扇环形小拼盘的面积为 $S_{扇形AOB}-S_{扇形COD}=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4}\times30^2-\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4}\times12^2=\frac{189\pi}{2}(\text{cm}^2)$.

13. 解:(1)$-1725°=-5\times360°+75°=-10\pi+\frac{5\pi}{12}$,

$\therefore -1725°$与$\frac{5\pi}{12}$的终边相同,

又$\frac{5\pi}{12}$是第一象限角,$\therefore -1725°$角是第一象限角.

(2)$\frac{64\pi}{3}=20\pi+\frac{4\pi}{3}$,$\therefore \frac{64\pi}{3}$与$\frac{4\pi}{3}$的终边相同,

又$\frac{4\pi}{3}$是第三象限角,$\therefore \frac{64\pi}{3}$是第三象限角.

14. 解:由扇形的面积 $S=\frac{1}{2}\alpha R^2=\frac{1}{2}lR=16$,得 $l=\frac{32}{R}$,

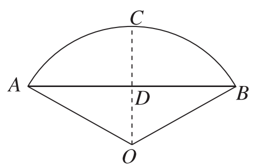
则扇形的周长为 $l+2R=\frac{32}{R}+2R\geqslant2\sqrt{\frac{32}{R}\times2R}=16$,

当且仅当$\frac{32}{R}=2R$,即 $R=4$ 时取等号,

此时$\frac{1}{2}\alpha\times4^2=16$,所以 $\alpha=2$,

所以扇形周长的最小值为 16,此时 $\alpha=2$.

15. D **[解析]** 设该扇形的圆心角为 α,由扇形面积公式得$\frac{1}{2}\times4^2\times\alpha=\frac{16\pi}{3}$,所以 $\alpha=\frac{2\pi}{3}$.取 $\widehat{AB}$ 的中点C,



连接 OC,交 AB 于点 D,则 $OC\perp AB$,则 $OD=OA\times\cos\angle AOD=4\cos\frac{\pi}{3}=2$,$AB=2AD=2\times4\sin\frac{\pi}{3}=4\sqrt{3}$,$CD=OC-OD=2$,所以扇形的弧长的近似值为 $l_{\widehat{AB}}=弦+\frac{2\times矢^2}{径}=AB+\frac{2CD^2}{2OA}=4\sqrt{3}+\frac{2\times4}{8}=4\sqrt{3}+1$.故选 D.

16. 解:(1)因为分针旋转的角速度为$-\frac{2\pi}{60}=-\frac{\pi}{30}(\text{rad/min})$,

时针旋转的角速度为$-\frac{2\pi}{12\times60}=-\frac{\pi}{360}(\text{rad/min})$,

所以$\left(-\frac{\pi}{30}+\frac{\pi}{360}\right)t=-2\pi n,n\in\mathbf{N}^*$,

即 $t=\frac{720}{11}n,n\in\mathbf{N}^*$.

(2)因为时针旋转一天所需的时间为 $24\times60=1440(\text{min})$,

所以令$\frac{720}{11}n\leqslant1440$,可得 $n\leqslant22$,

又 $n\in\mathbf{N}^*$,故时针与分针一天内重合 22 次.

5.2 三角函数的概念

5.2.1 三角函数的概念

1. D **[解析]** 由三角函数的定义易得角 α 的终边与单位圆的交点坐标是$\left(-\frac{12}{13},\frac{5}{13}\right)$.故选 D.

2. B **[解析]** 因为角 θ 的终边经过点 $P(4,-3)$,所以$\sin\theta=\frac{-3}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=-\frac{3}{5}$,故选 B.

3. B **[解析]** $\sin(-300°)\cos420°=\sin(-360°+60°)\cos(360°+60°)=\sin60°\cos60°=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.故选 B.

4. D **[解析]** 由三角函数的定义可知,当 $\cos\theta>0$ 时,θ 为第一、四象限角或终边在 x 轴非负半轴上的角;当 $\tan\theta<0$ 时,θ 为第二、四象限角.所以当 $\cos\theta>0$ 且 $\tan\theta<0$ 时,θ 为第四象限角.故选 D.

5. D **[解析]** $\because$角 θ 的顶点为坐标原点,始边为 x 轴的正半轴,且 $\cos\theta=-\frac{3}{5}$,点 $M(x,8)$是角 θ 终边上一点,$\therefore x<0$,由三角函数的定义得$\frac{x}{\sqrt{x^2+8^2}}=-\frac{3}{5}$,解得 $x=-6$.故选 D.

6. A **[解析]** 因为$\frac{\pi}{2}<2<3<\pi<4<\frac{3\pi}{2}$,所以 $\sin2>0$,$\cos3<0$,$\tan4>0$,所以 $\sin2\cdot\cos3\cdot\tan4<0$,故选 A.

7. C **[解析]** 由 α 为第三象限角,得 $2k\pi+\pi<\alpha<2k\pi+\frac{3\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,所以 $k\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<k\pi+\frac{3\pi}{4}$,$k\in\mathbf{Z}$.当 k 是偶数时,$\frac{\alpha}{2}$是第二象限角,此时 $\sin\frac{\alpha}{2}>0$,$\cos\frac{\alpha}{2}<0$;当 k 是奇数时,$\frac{\alpha}{2}$是第四象限角,此时 $\sin\frac{\alpha}{2}<0$,$\cos\frac{\alpha}{2}>0$,故 A,B 错误.$4k\pi+2\pi<2\alpha<4k\pi+3\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,所以 2α 是第一或第二象限角或终边在 y 轴的非负半轴上的角.当 2α 是第一象限角时,$\sin2\alpha>0$,$\cos2\alpha>0$;当 2α 是第二象限角时,$\sin2\alpha>0$,$\cos2\alpha<0$;当 2α 是终边在 y 轴的非负半轴上的角时,$\sin2\alpha=1>0$,$\cos2\alpha=0$.故 C 正确,D 错误.故选 C.

8. AD **[解析]** 由题意得$\left(\frac{1}{3}\right)^2+n^2=1$,解得 $n=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$.由三角函数的定义,可得 $\sin\alpha=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$,$\cos\alpha=\frac{1}{3}$,$\tan\alpha=\pm2\sqrt{2}$.故选 AD.

9. CD **[解析]** 因为角 α 的终边经过点 $P(-4m,3m)(m\neq0)$,所以 $\sin\alpha=\frac{3m}{\sqrt{(-4m)^2+(3m)^2}}=\frac{3m}{|5m|}$,$\cos\alpha=\frac{-4m}{\sqrt{(-4m)^2+(3m)^2}}=\frac{-4m}{|5m|}$.当 $m>0$ 时,$\sin\alpha=\frac{3}{5}$,$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$,此时 $2\sin\alpha+\cos\alpha=2\times\frac{3}{5}+\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{2}{5}$;当 $m<0$ 时,$\sin\alpha=-\frac{3}{5}$,$\cos\alpha=\frac{4}{5}$,此时 $2\sin\alpha+\cos\alpha=2\times\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{4}{5}=-\frac{2}{5}$.所以 $2\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值可能为$\frac{2}{5}$或$-\frac{2}{5}$.故选 CD.

10. $\frac{7\pi}{4}$ **[解析]** $\because\frac{\sqrt{2}}{2}>0$,$-\frac{\sqrt{2}}{2}<0$,$\therefore$点 P 在第四象限,又

$\tan\theta=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-1$,$\theta\in[0,2\pi)$,$\therefore\theta=\frac{7\pi}{4}$.

11. $\frac{3}{4}$ **[解析]** $\because\cos60°=\frac{1}{2}$,$\sin30°=\frac{1}{2}$,$P(8\cos60°,6\sin30°)$,$\therefore P(4,3)$,利用三角函数的定义知,$\tan\alpha=\frac{3}{4}$.

12. (1)-1 (2)$(a+b)^2$ **[解析]** (1)原式$=\sin\frac{3\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}+$

$\cos\pi+1=-1+0-1+1=-1$.

(2)原式$=a^2\sin 90°-b^2\cos 180°+2ab\tan 45°=a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$.

13. **解:**由角 α 的终边上一点 $P(-\sqrt{3},y)(y\neq 0)$,且 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}y$,得 $\sin\alpha=\frac{y}{\sqrt{3+y^2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}y$,解得 $y=\pm\sqrt{5}$,

则 $\cos\alpha=\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3+y^2}}=-\frac{\sqrt{6}}{4}$.

当 $y=\sqrt{5}$ 时,$\tan\alpha=\frac{\sqrt{5}}{-\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{15}}{3}$;

当 $y=-\sqrt{5}$ 时,$\tan\alpha=\frac{-\sqrt{5}}{-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{3}$.

所以 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{4}$,$\tan\alpha=\pm\frac{\sqrt{15}}{3}$.

14. **解:**由题意知,角 x 的终边不在坐标轴上.

当 x 是第一象限角时,$y=\frac{\sin x}{\sin x}+\frac{\cos x}{\cos x}+\frac{\tan x}{\tan x}=3$;

当 x 是第二象限角时,$y=\frac{\sin x}{\sin x}+\frac{-\cos x}{\cos x}+\frac{\tan x}{-\tan x}=-1$;

当 x 是第三象限角时,$y=\frac{\sin x}{-\sin x}+\frac{-\cos x}{\cos x}+\frac{\tan x}{\tan x}=-1$;

当 x 是第四象限角时,$y=\frac{\sin x}{-\sin x}+\frac{\cos x}{\cos x}+\frac{\tan x}{-\tan x}=-1$.

综上,函数 $y=\frac{\sin x}{|\sin x|}+\frac{|\cos x|}{\cos x}+\frac{\tan x}{|\tan x|}$ 的值域为 $\{-1,3\}$.

15. B 【解析】∵实数 x,y 满足 $|\tan x|+|\tan y|>|\tan x+\tan y|$,∴$\tan x$ 与 $\tan y$ 异号,又∵$y\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$,∴$\tan y>0$,$\tan x<0$,则 $|\tan x-\tan y|=\tan y-\tan x$,故选 B.

16. **解:**(1)由 $\frac{1}{|\sin\alpha|}=-\frac{1}{\sin\alpha}$,可知 $\sin\alpha<0$,∴α 是第三或第四象限角或终边在 y 轴的负半轴上的角.

由 $\lg\cos\alpha$ 有意义,可知 $\cos\alpha>0$,∴α 是第一或第四象限角或终边在 x 轴的正半轴上的角.

综上可知,α 是第四象限角,即角 α 的终边在第四象限.

(2)∵$|OM|=1$,∴$\left(\frac{3}{5}\right)^2+m^2=1$,解得 $m=\pm\frac{4}{5}$,

又 α 是第四象限角,∴$m<0$,∴$m=-\frac{4}{5}$.

由正弦函数的定义可知 $\sin\alpha=\frac{m}{|OM|}=\frac{-\frac{4}{5}}{1}=-\frac{4}{5}$.

5.2.2 同角三角函数的基本关系

1. B 【解析】由 $\sin\alpha=-\frac{1}{3}$,$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$,可知 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,则 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$. 故选 B.

2. C 【解析】∵α 是第二象限角,∴$\cos\alpha<0$. 又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{1}{2}$,∴$\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

3. A 【解析】因为 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{8}<0$,$\theta\in(0,\pi)$,所以 $\cos\theta<0$,$\sin\theta>0$,所以 $\sin\theta-\cos\theta>0$,所以 $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1-2\times\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{5}{4}$,则 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{2}$,故选 A.

4. B 【解析】由 $1-\sin^2x=\cos^2x$,可得 $\frac{1+\sin x}{\cos x}=-\frac{\cos x}{\sin x-1}=-\frac{1}{2}$.

5. D 【解析】由 $\sin\theta=\frac{1-a}{1+a}$,$\cos\theta=\frac{3a-1}{1+a}$,可得 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2+\left(\frac{3a-1}{1+a}\right)^2=1$,解得 $a=1$ 或 $a=\frac{1}{9}$. 由于 θ 为第二象限角,所以 $\sin\theta=\frac{1-a}{1+a}>0$,$\cos\theta=\frac{3a-1}{1+a}<0$,故当 $a=1$ 时,$\sin\theta=\frac{1-a}{1+a}=0$,不符合要求,$a=\frac{1}{9}$ 符合要求,故选 D.

6. C 【解析】由 $2\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{2}{5}$ 得 $\cos\alpha=\frac{2}{5}-2\sin\alpha$,

∴$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\sin^2\alpha+\left(\frac{2}{5}-2\sin\alpha\right)^2=5\sin^2\alpha-\frac{8}{5}\sin\alpha+\frac{4}{25}=1$,解得 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ 或 $\sin\alpha=-\frac{7}{25}$,又 $\alpha\in(0,\pi)$,

∴$\sin\alpha>0$,即 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$,∴$\cos\alpha=\frac{2}{5}-\frac{6}{5}=-\frac{4}{5}$,

∴$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4}$. 故选 C.

7. A 【解析】∵$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$,∴$\cos\alpha<0$,则 $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=\sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)^2}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}}-\sqrt{\frac{(1-\sin\alpha)^2}{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}}=\sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}}-\sqrt{\frac{(1-\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}}=\frac{1+\sin\alpha}{|\cos\alpha|}-\frac{1-\sin\alpha}{|\cos\alpha|}=-\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}=-2\tan\alpha$,故选 A.

8. ABC 【解析】由同角三角函数的基本关系的平方关系知,A,B,C 显然恒成立;对于 D,当 $\alpha=k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$ 时,$\tan\alpha$ 无意义,等式不成立. 故选 ABC.

9. BD 【解析】由题意得 $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{25}$,解得 $\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{12}{25}$,故 D 正确;$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=1+\frac{24}{25}=\frac{49}{25}$,∵$\alpha$ 是钝角,∴$\sin\alpha-\cos\alpha>0$,则 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{7}{5}$,由 $\begin{cases}\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{1}{5},\\ \sin\alpha-\cos\alpha=\frac{7}{5},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\sin\alpha=\frac{3}{5},\\ \cos\alpha=-\frac{4}{5},\end{cases}$

∴$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{3}{4}$,故 A,C 错误,B 正确. 故选 BD.

10. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 【解析】∵$\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=1$,

$\therefore \sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=1-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$. $\because 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\therefore \frac{\pi}{4}<\alpha+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$, $\therefore \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)>0$, 则 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

11. $\frac{4}{5}$ **【解析】** $\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta-2\cos^2\theta=$
$\frac{\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta-2\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{\tan^2\theta+\tan\theta-2}{\tan^2\theta+1}=\frac{2^2+2-2}{2^2+1}=\frac{4}{5}$.

12. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ **【解析】** $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$的两边同时平方,可得 $1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{3}{4}$,则 $2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{1}{4}<0$.因为 α 是$\triangle ABC$的内角,所以 $\sin\alpha>0$,所以 $\cos\alpha<0$,所以 $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}=\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

13. **解:**(1)$\because 2\cos^2\alpha+3\cos\alpha\sin\alpha-3\sin^2\alpha=$
$\frac{2\cos^2\alpha+3\cos\alpha\sin\alpha-3\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2+3\tan\alpha-3\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha+1}=1$,
$\therefore 4\tan^2\alpha-3\tan\alpha-1=0$,解得 $\tan\alpha=-\frac{1}{4}$或 $\tan\alpha=1$.
$\because \alpha\in\left(-\frac{3\pi}{2},-\pi\right)$,$\therefore \tan\alpha<0$,$\therefore \tan\alpha=-\frac{1}{4}$.
(2)原式$=\frac{2\tan\alpha-3}{4\tan\alpha-9}=\frac{7}{20}$.

14. **证明:**要证$\frac{\sin\alpha-\cos\alpha+1}{\sin\alpha+\cos\alpha-1}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$,
只需证$\cos\alpha(\sin\alpha-\cos\alpha+1)=(1+\sin\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha-1)$,即证 $\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha+\cos\alpha=\sin\alpha+\cos\alpha-1+\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-\sin\alpha$,
即证 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,此式显然成立,
$\therefore \frac{\sin\alpha-\cos\alpha+1}{\sin\alpha+\cos\alpha-1}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

15. C **【解析】** $\because \sin\alpha,\cos\alpha$ 是关于 x 的方程 $x^2+ax-a=0$ $(a\in\mathbf{R})$的两个实根,$\therefore \Delta=a^2+4a\geqslant 0$,解得 $a\geqslant 0$ 或 $a\leqslant -4$.由根与系数的关系得$\begin{cases}\sin\alpha+\cos\alpha=-a,\\ \sin\alpha\cos\alpha=-a,\end{cases}$ $\therefore (\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha=1-2a=a^2$,即 $a^2+2a-1=0$,解得 $a=-1+\sqrt{2}$ 或 $a=-1-\sqrt{2}$(舍去),$\therefore a$ 的值是$\sqrt{2}-1$.故选 C.

16. **解:**(1)因为 $\cos^4\frac{\pi}{6}-\sin^4\frac{\pi}{6}=\left(\cos^2\frac{\pi}{6}+\sin^2\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos^2\frac{\pi}{6}-\sin^2\frac{\pi}{6}\right)=\cos^2\frac{\pi}{6}-\sin^2\frac{\pi}{6}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$,$\cos^2\frac{\pi}{6}-\sin^2\frac{\pi}{6}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$,$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$,
所以 $\cos^4\frac{\pi}{6}-\sin^4\frac{\pi}{6}$,$\cos^2\frac{\pi}{6}-\sin^2\frac{\pi}{6}$,$\cos\frac{\pi}{3}$的值相等.
(2)因为 $\cos^4\frac{\pi}{4}-\sin^4\frac{\pi}{4}=\left(\cos^2\frac{\pi}{4}+\sin^2\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos^2\frac{\pi}{4}-\sin^2\frac{\pi}{4}\right)=\cos^2\frac{\pi}{4}-\sin^2\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$,$\cos^2\frac{\pi}{4}-\sin^2\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$,$\cos\frac{\pi}{2}=0$,
所以$\cos^4\frac{\pi}{4}-\sin^4\frac{\pi}{4}$,$\cos^2\frac{\pi}{4}-\sin^2\frac{\pi}{4}$,$\cos\frac{\pi}{2}$的值相等.
(3)证明:$\forall x\in\mathbf{R}$,$\cos^4x-\sin^4x=(\cos^2x+\sin^2x)(\cos^2x-\sin^2x)=\cos^2x-\sin^2x$.
(4)推测$\forall x\in\mathbf{R}$,$\cos^2x-\sin^2x=\cos 2x$.

5.3 诱导公式

第1课时 诱导公式(一)

1. D **【解析】** $\sin 1920^\circ=\sin(360^\circ\times 5+120^\circ)=\sin 120^\circ=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$.故选 D.

2. C **【解析】** $\because \tan(3\pi+\alpha)=\tan\alpha=-2$,$\therefore \tan(\alpha-\pi)=\tan\alpha=-2$.故选 C.

3. D **【解析】** $\sin(\alpha+\pi)=-\sin\alpha=-\frac{-2}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.故选 D.

4. C **【解析】** 因为 n 为整数,所以$\frac{\sin(n\pi+\alpha)}{\cos(n\pi+\alpha)}=\tan(n\pi+\alpha)=\tan\alpha\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right)$.

5. B **【解析】** $\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)=\cos\left[\pi-\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\right]=-\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=-\frac{2}{3}$.故选 B.

6. B **【解析】** $\because \frac{\sin(\alpha-\pi)+\cos(\pi-\alpha)}{\sin(-\alpha)+\cos(2\pi-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha-\cos\alpha}{-\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{-\tan\alpha-1}{-\tan\alpha+1}=3$,$\therefore -\tan\alpha-1=-3\tan\alpha+3$,可得 $\tan\alpha=2$.

7. D **【解析】** 点 $P(0,1)$为角 $\alpha=\frac{\pi}{2}$的终边上一点,则点 P'落在角$\beta=\frac{\pi}{2}+3\times\frac{2\pi}{9}=\frac{7\pi}{6}$的终边上,因为 $\cos\beta=\cos\frac{7\pi}{6}=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\sin\beta=\sin\frac{7\pi}{6}=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$,所以 P'的坐标为$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

8. ABD **【解析】** 对于 A,$\tan(\pi+1)=\tan 1$,故 A 正确;对于 B,$\frac{\sin(-\alpha)}{\tan(360^\circ-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{-\tan\alpha}=\cos\alpha$,故 B 正确;对于 C,$\frac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}=-\tan\alpha$,故 C 错误;对于 D,$\frac{\cos(\pi-\alpha)\tan(-\pi-\alpha)}{\sin(2\pi-\alpha)}=\frac{-\cos\alpha\cdot(-\tan\alpha)}{-\sin\alpha}=-\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}=-1$,故 D 正确.故选 ABD.

9. AD **【解析】** 对于 A,$\sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A$,故 A 正确;对于 B,$\tan(A+B)=\tan(\pi-C)=-\tan C$,故 B 错误;对于 C,当 $A=\frac{\pi}{3}$,$B=\frac{\pi}{4}$,$C=\frac{5\pi}{12}$时,显然 $\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}>\frac{1}{2}=\cos A$,故 C 错误;对于 D,$\cos(A+B)=\cos(\pi-C)=-\cos C$,由 C 为锐角,可得 $\cos C>0$,所以 $\cos(A+B)=-\cos C<\cos C$,故 D 正确.故选 AD.

10. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ **【解析】** $\sin 780^\circ+\tan 240^\circ=\sin(360^\circ\times 2+60^\circ)+$

$\tan(180°+60°)=\sin 60°+\tan 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

11. 1 **［解析］** 因为 $f(2024)=a\sin(2024\pi+\alpha)+b\cos(2024\pi+\beta)=a\sin\alpha+b\cos\beta=-1$，所以 $f(2025)=a\sin(2025\pi+\alpha)+b\cos(2025\pi+\beta)=-a\sin\alpha-b\cos\beta=-(a\sin\alpha+b\cos\beta)=1$.

12. $\pm\frac{3}{5}$ **［解析］** 因为 $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=\frac{4}{5}$，所以 $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=\pm\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}=\pm\frac{3}{5}$，所以 $\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)=\sin\left[\pi-\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=\pm\frac{3}{5}$.

13. 解：(1) $\sin\frac{8\pi}{3}+\tan\left(-\frac{5\pi}{4}\right)+\cos\frac{7\pi}{6}=\sin\frac{2\pi}{3}+\tan\frac{3\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-1-\frac{\sqrt{3}}{2}=-1$.

(2)原式 $=\frac{-\tan 150°\cos 570°\cos 1140°}{-\tan 210°(-\sin 690°)}=$

$\frac{-\tan(180°-30°)\cos(360°+210°)\cos(3\times 360°+60°)}{\tan(180°+30°)\sin(360°+330°)}=$

$\frac{\tan 30°\cos(180°+30°)\cos 60°}{\tan 30°\sin(360°-30°)}=\frac{\tan 30°(-\cos 30°)\cos 60°}{\tan 30°(-\sin 30°)}=$

$\frac{\cos 30°\cos 60°}{\sin 30°}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

14. 解：(1) $f(\alpha)=\frac{\sin^2\alpha\cos\alpha\tan\alpha}{-\sin\alpha(-\tan\alpha)}=\sin\alpha\cos\alpha$.

(2) $\because \alpha=-\frac{31\pi}{3}=-10\pi-\frac{\pi}{3}$，

$\therefore \sin\alpha=\sin\left(-10\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\alpha=\cos\left(-10\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，

则 $f(\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

15. B **［解析］** ①$\sin(A+B)+\sin C=2\sin C$，故①不符合题意；②$\cos(A+B)+\cos C=-\cos C+\cos C=0$，故②符合题意；③$\sin(2A+2B)+\sin 2C=\sin 2(A+B)+\sin 2C=\sin 2(\pi-C)+\sin 2C=\sin(2\pi-2C)+\sin 2C=-\sin 2C+\sin 2C=0$，故③符合题意；④$\cos(2A+2B)+\cos 2C=\cos 2(A+B)+\cos 2C=\cos 2(\pi-C)+\cos 2C=\cos(2\pi-2C)+\cos 2C=\cos 2C+\cos 2C=2\cos 2C$，故④不符合题意.故选 B.

16. 解：因为方程 $5x^2-7x-6=0$ 的两个实根分别为 2 和 $-\frac{3}{5}$，

所以 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$.

又由 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，得 $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\pm\frac{4}{5}$.

当 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ 时，$\tan\alpha=-\frac{3}{4}$；

当 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$ 时，$\tan\alpha=\frac{3}{4}$.

所以原式 $=\frac{\cos\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\tan^2\alpha\cdot\tan\alpha}{\sin\alpha\cdot\sin\alpha}=\tan\alpha=\pm\frac{3}{4}$.

第 2 课时　诱导公式（二）

1. C **［解析］** $\cos 150°=\cos(90°+60°)=-\sin 60°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.故选 C.

2. C **［解析］** $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha=-\frac{3}{5}$.

3. B **［解析］** 因为 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta<0$，$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta>0$，所以 θ 是第二象限角，故选 B.

4. D **［解析］** $\because\cos 28°=a$，$\therefore\cos(-602°)=\cos 602°=\cos(2\times 360°-118°)=\cos 118°=\cos(90°+28°)=-\sin 28°=-\sqrt{1-\cos^2 28°}=-\sqrt{1-a^2}$.故选 D.

5. B **［解析］** $\cos\left(\theta+\frac{7}{6}\pi\right)=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}\right)=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}+\pi\right)=-\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{3}$，故选 B.

6. A **［解析］** 根据题意得 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4}{5}$，即 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\frac{4}{5}$，所以 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$.故选 A.

7. D **［解析］** $\sin(\pi+\alpha)=-\frac{1}{4}$，即 $\sin\alpha=\frac{1}{4}$，若 $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$，则 $\cos\beta=\sin\alpha=\frac{1}{4}$，$\sin\beta=\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$，$\tan\beta=\pm\sqrt{15}$，故 A，C 错误；对于 B，若 $\cos(\pi-\beta)=\frac{1}{4}$，则 $\cos\beta=-\frac{1}{4}$，B 错误；对于 D，若 $\cos(2\pi-\beta)=\frac{1}{4}$，则 $\cos\beta=\frac{1}{4}$，D 正确.故选 D.

8. ABC **［解析］** $\sin(-x)=-\sin x$，故 A 中等式恒成立；$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin x$，故 B 中等式恒成立；$\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$，故 C 中等式恒成立；$\cos(\pi-x)=-\cos x$，故 D 中等式不恒成立.故选 ABC.

9. AC **［解析］** 由 $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha=-\frac{1}{2}$，得 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$，所以 $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\sin(5\pi-\alpha)=\sin\alpha=\frac{1}{2}$，A 选项正确；$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，B 选项错误；$\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)=-\sin\alpha=-\frac{1}{2}$，C 选项正确；$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\pm\sqrt{3}$，D 选项错误.故选 AC.

10. $-\frac{3}{5}$ **［解析］** 由题得 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha=\frac{3}{5}$，则 $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha=-\frac{3}{5}$.

11. $\frac{15}{16}$ **［解析］** $\because\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}$，$\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，$\therefore\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=$

$\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1-\cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$.

12\. $\frac{1}{7}$ 【解析】因为 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$，所以$\sin\alpha=2\cos\alpha$，所以原式$=\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{5\sin\alpha-3\cos\alpha}=\frac{2\cos\alpha-\cos\alpha}{10\cos\alpha-3\cos\alpha}=\frac{1}{7}$.

13\. 解：(1) $\frac{\sqrt{1-2\sin100^\circ\cos280^\circ}}{\cos370^\circ-\sqrt{1-\cos^2170^\circ}}=\frac{\sqrt{1-2\sin(90^\circ+10^\circ)\cos(270^\circ+10^\circ)}}{\cos(360^\circ+10^\circ)-\sqrt{1-\cos^2170^\circ}}=\frac{\sqrt{1-2\cos10^\circ\sin10^\circ}}{\cos10^\circ-\sin170^\circ}=\frac{\sqrt{(\cos10^\circ-\sin10^\circ)^2}}{\cos10^\circ-\sin10^\circ}=\frac{\cos10^\circ-\sin10^\circ}{\cos10^\circ-\sin10^\circ}=1$.

(2)证明：左边$=\frac{\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{2}+x\right)}{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}-2\pi\right)\tan(-x)}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x}=\frac{-\sin x}{\cos x\tan x}=-1$，右边$=-1$，

所以左边=右边，所以原等式成立.

14\. 解：(1)由题意可知 $\sin\alpha=y_0$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

因为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以 $y_0^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2=1$，

又 $y_0>0$，所以可得 $y_0=\frac{\sqrt{3}}{3}$，即 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

又因为 $\beta=\alpha+\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

所以 $\sin\beta=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}(k\in\mathbf{Z})$，

$\cos\beta=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=-\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}(k\in\mathbf{Z})$.

所以 $\tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=-\sqrt{2}$.

(2)由(1)知 $\tan\beta=-\sqrt{2}$，所以$\frac{\sin(-\beta)-\cos(\pi-\beta)}{\sin(\pi+\beta)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}=\frac{-\sin\beta+\cos\beta}{-\sin\beta-\cos\beta}=\frac{-\tan\beta+1}{-\tan\beta-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=3+2\sqrt{2}$.

15\. 6 【解析】由题意 $f(x)=a\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+b\tan x+8=-a\sin x+b\tan x+8$，则 $f(-2)=10=-a\sin(-2)+b\tan(-2)+8=a\sin2-b\tan2-8+16=-(-a\sin2+b\tan2+8)+16=-f(2)+16$，解得 $f(2)=6$.

16\. 解：猜想$\frac{\cos\alpha}{\sin(45^\circ+\alpha)}+\frac{\cos(90^\circ-\alpha)}{\sin(135^\circ-\alpha)}=\sqrt{2}$.

证明：由诱导公式可得 $\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha$，$\sin(135^\circ-\alpha)=\sin(45^\circ+\alpha)$，

所以$\frac{\cos\alpha}{\sin(45^\circ+\alpha)}+\frac{\cos(90^\circ-\alpha)}{\sin(135^\circ-\alpha)}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin(45^\circ+\alpha)}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha\cos45^\circ+\cos\alpha\sin45^\circ}=\sqrt{2}$.

滚动习题（九）

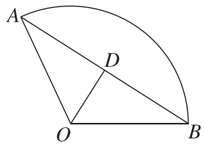
1\. A 【解析】$-1485^\circ=315^\circ-5\times360^\circ$. 故选 A.

2\. D 【解析】∵α 是第二象限角，∴$\sin\alpha>0$，$\tan\alpha<0$，∴点 $P(\sin\alpha,\tan\alpha)$在第四象限. 故选 D.

3\. B 【解析】$\sin2024^\circ=\sin(360^\circ\times6-136^\circ)=\sin(-136^\circ)=\sin(-180^\circ+44^\circ)=-\sin44^\circ$. 故选 B.

4\. B 【解析】因为 α 是第二象限角，$P(x,1)$为其终边上一点，所以 $x<0$，$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{3}x$，解得 $x=2\sqrt{2}$(舍去)或 $x=-2\sqrt{2}$，所以 $\tan\alpha=\frac{1}{-2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$. 故选 B.

5\. A 【解析】扇形的圆心角为 2 弧度，所对弦长为 4，设 O 为圆心，如图，取 AB 的中点 D，连接 OD，则 $OD\perp AB$，则 $\angle AOD=1$，则扇形的半径 $r=\frac{2}{\sin1}$，所以扇形的弧长 $l=2\times\frac{2}{\sin1}=\frac{4}{\sin1}$，则扇形的面积 $S=\frac{1}{2}\times\frac{4}{\sin1}\times\frac{2}{\sin1}=\frac{4}{\sin^21}$. 故选 A.



6\. D 【解析】因为 $\tan(3\pi-\alpha)=\tan(2\pi+\pi-\alpha)=\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha=\frac{1}{2}$，所以 $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$，又因为$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\sin(\pi+\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi-\alpha)}=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{1+\tan\alpha}{\tan\alpha-1}=-\frac{1}{3}$，故选 D.

7\. AD 【解析】因为 $\theta\in(0,\pi)$，$\cos\theta=-\frac{4}{5}$，所以$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$，θ 为第二象限角，A 正确；$\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$，则$\frac{\theta}{2}$为第一象限角，B 错误；因为 $\theta\in(0,\pi)$，$\cos\theta=-\frac{4}{5}$，所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{3}{5}$，所以 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{3}{4}$，C 错误；$4\sin\theta\cos\theta-2\cos^2\theta=4\times\frac{3}{5}\times\left(-\frac{4}{5}\right)-2\times\left(-\frac{4}{5}\right)^2=-\frac{16}{5}$，D 正确. 故选 AD.

8\. ABD 【解析】由诱导公式可知 $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}$，A 中等式不成立；$\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\pi\right)=\sin\frac{\pi}{3}$，B 中等式不成立；$\cos\left(-\frac{11\pi}{9}\right)=\cos\frac{11\pi}{9}=\cos\left(\pi+\frac{2\pi}{9}\right)=-\cos\frac{2\pi}{9}$，C 中等式成立；$\tan\frac{11\pi}{6}=\tan\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\frac{\pi}{6}$，D 中等式不成立. 故选 ABD.

9\. $\frac{1}{2}$ 【解析】由题意知，角 α 的终边经过点 $P\left(\sin\frac{\pi}{6},\cos\frac{\pi}{6}\right)$，且点 P 在单位圆上，则 $\cos\alpha=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$.

10\. $-\frac{\sqrt{14}}{4}$ 【解析】∵$\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=-\frac{\sqrt{2}}{4}<0$，∴$\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\pm\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)}=\pm\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\pm\frac{\sqrt{14}}{4}$.

∵$\alpha\in(0,\pi)$，∴$-\alpha\in(-\pi,0)$，∴$\frac{\pi}{6}-\alpha\in\left(-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$，

$\therefore \sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=-\frac{\sqrt{14}}{4}$，$\therefore \sin\left(\alpha+\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left[\pi-\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=-\frac{\sqrt{14}}{4}$.

11. $-\frac{1}{2}$　**[解析]** $2\sin\left(-\frac{19}{6}\pi\right)+\cos\frac{28\pi}{3}+\tan\left(-\frac{17\pi}{4}\right)=2\sin\left(-3\pi-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(9\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\tan\left(-4\pi-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}=2\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$.

12. 2π　**[解析]** 设扇形的半径为 r，弧长为 l，则 $l+2r=4\pi$，所以 $r=\frac{4\pi-l}{2}(0<l<4\pi)$，则扇形的面积 $S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\times l\times\frac{4\pi-l}{2}=-\frac{1}{4}l^2+\pi l$，根据二次函数的性质可知，当 $l=-\frac{\pi}{2\times\left(-\frac{1}{4}\right)}=2\pi$ 时，S 取得最大值.

13. **解：**(1)因为角 α 满足 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以 $\cos^2\alpha=\frac{16}{25}$，

所以 $\cos\alpha=\pm\frac{4}{5}$，可得 $\tan\alpha=\pm\frac{3}{4}$.

(2)易知 $\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha+1=\frac{\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha+1}{1}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\tan\alpha+1}{\tan^2\alpha+1}$.

由(1)可知 $\tan\alpha=\pm\frac{3}{4}$，

当 $\tan\alpha=\frac{3}{4}$ 时，原式 $=\frac{\tan\alpha+1}{\tan^2\alpha+1}=\frac{\frac{3}{4}+1}{\frac{9}{16}+1}=\frac{28}{25}$；

当 $\tan\alpha=-\frac{3}{4}$ 时，原式 $=\frac{\tan\alpha+1}{\tan^2\alpha+1}=\frac{-\frac{3}{4}+1}{\frac{9}{16}+1}=\frac{4}{25}$.

14. **解：**(1)由题意得 $f(\alpha)=\frac{\cos\alpha\cdot(-\cos\alpha)\cdot(-\sin\alpha)}{-\cos\alpha\cdot\cos\alpha\cdot(-\tan\alpha)}=\cos\alpha$.

(2)若 $f\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{1}{3}$，则 $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{1}{3}$，

$\therefore \cos^2\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\cos^2\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\right]=\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=1-\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$，$\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)=\cos\left[\pi-\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\right]=-\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=-\frac{1}{3}$，

$\therefore \cos^2\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{8}{9}-\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$.

15. **解：**(1)因为 $\sin^2x+\cos^2x=1$，所以 $\sin^2x=1-\cos^2x$，所以 $\sin^2x=(1+\cos x)(1-\cos x)$.

因为 $x\in(0,\pi)$，所以 $\sin x\neq0$，$1-\cos x\neq0$，

所以 $\frac{\sin x}{1-\cos x}=\frac{1+\cos x}{\sin x}$，

又 $\frac{\sin x}{1-\cos x}=\sqrt{3}$，所以 $\frac{1+\cos x}{\sin x}=\sqrt{3}$.

(2)因为 $\sin x+\cos x=\frac{1}{5}$，所以 $(\sin x+\cos x)^2=\frac{1}{25}$，

即 $\sin^2x+\cos^2x+2\sin x\cos x=\frac{1}{25}$，

所以 $2\sin x\cos x=-\frac{24}{25}<0$，

又 $x\in(0,\pi)$，所以 $\sin x>0$，所以 $\cos x<0$，

所以 $\cos x-\sin x<0$，而 $(\cos x-\sin x)^2=\sin^2x+\cos^2x-2\sin x\cos x=1+\frac{24}{25}=\frac{49}{25}$，

所以 $\cos x-\sin x=-\frac{7}{5}$，所以 $\cos^2x-\sin^2x=(\cos x-\sin x)(\sin x+\cos x)=\frac{1}{5}\times\left(-\frac{7}{5}\right)=-\frac{7}{25}$.

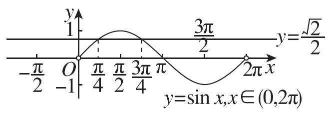
5.4　三角函数的图象与性质

5.4.1　正弦函数、余弦函数的图象

1. A　**[解析]** 用“五点法”画 $y=\sin x,x\in[0,2\pi]$ 的图象，五个关键点分别为 $(0,0)$，$\left(\frac{\pi}{2},1\right)$，$(\pi,0)$，$\left(\frac{3\pi}{2},-1\right)$，$(2\pi,0)$，所以选项 A 中的点不在函数图象上，故选 A.

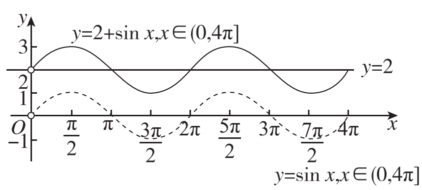
2. D　**[解析]** 由题意得 $g(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$，易知 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度，得到 $g(x)$ 的图象. 故选 D.

3. B　**[解析]** 作出函数 $y=\sin x,x\in(0,2\pi)$ 的图象与直线 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$，如图所示. 根据特殊角的正弦值可知，函数 $y=\sin x$，$x\in(0,2\pi)$ 的图象与直线 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的交点的横坐标为 $\frac{\pi}{4}$ 和 $\frac{3\pi}{4}$，由图可知，不等式的解集为 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$. 故选 B.



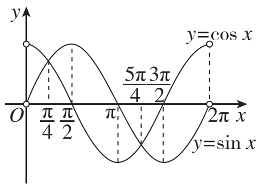
4. B　**[解析]** 对于 A，$f(x)=\cos(-x)=\cos x$，其图象与 $y=\cos x$ 的图象重合，A 错误；对于 B，$f(x)=-\cos x$ 的图象与 $y=\cos x$ 的图象关于 x 轴对称，B 正确；对于 C，当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)=\cos|x|=\cos x$，可知其图象不可能与 $y=\cos x$ 的图象关于 x 轴对称，C 错误；对于 D，保留 $y=\cos x$ 位于 x 轴上方的图象，将 $y=\cos x$ 位于 x 轴下方的图象翻折到 x 轴上方，就可以得到 $f(x)=|\cos x|$ 的图象，可知其图象与 $y=\cos x$ 的图象不关于 x 轴对称，D 错误. 故选 B.

5. D　**[解析]** 在同一平面直角坐标系中，画出函数 $y=2+\sin x,x\in(0,4\pi]$ 的图象和直线 $y=2$（如图所示），可得两图象的交点共有 4 个. 故选 D.



6. C　**[解析]** 作出 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 在 $(0,2\pi)$ 上的图象如图，由图可知满足 $\cos x>\sin x$ 的 x 的取值范围为 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\cup$

$\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right)$.

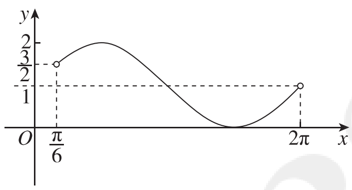


7. D 【解析】由题意得 $y=\begin{cases}2\cos x, 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\text{或}\frac{3\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2\pi,\\ 0, \frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2},\end{cases}$

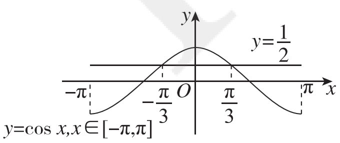
分析选项可知 D 符合题意,故选 D.

8. BD 【解析】$y=-\cos x$ 的最大值为 1,令 $-\cos x=1$,解得 $x=\pi+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$,所以函数 $y=-\cos x$ 的图象中与 y 轴最近的最高点的坐标为 $(\pi,1)$ 或 $(-\pi,1)$.

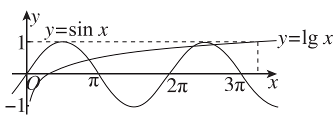
9. ABC 【解析】作出函数 $y=1+\sin x, x\in\left(\frac{\pi}{6},2\pi\right)$ 的图象如图所示. 由图可知,当 $t>2$ 或 $t<0$ 时,函数 $y=1+\sin x$, $x\in\left(\frac{\pi}{6},2\pi\right)$ 的图象与直线 $y=t$ 的交点个数为 0;当 $0<t<1$ 或 $\frac{3}{2}<t<2$ 时,函数 $y=1+\sin x, x\in\left(\frac{\pi}{6},2\pi\right)$ 的图象与直线 $y=t$ 的交点个数为 2;当 $t=0$ 或 $1\leqslant t\leqslant\frac{3}{2}$ 或 $t=2$ 时,函数 $y=1+\sin x, x\in\left(\frac{\pi}{6},2\pi\right)$ 的图象与直线 $y=t$ 的交点个数为 1. 综上,函数 $y=1+\sin x, x\in\left(\frac{\pi}{6},2\pi\right)$ 的图象与直线 $y=t$ 的交点个数可能为 0,1,2. 故选 ABC.



10. $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$ 【解析】画出 $y=\cos x(x\in[-\pi,\pi])$ 的图象,如图所示,由图可知,不等式 $\cos x\geqslant\frac{1}{2}(x\in[-\pi,\pi])$ 的解集为 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$.



11. 3 【解析】在同一直角坐标系中作出函数 $y=\sin x$ 与 $y=\lg x$ 的图象如图,由图可知两函数图象有 3 个交点,所以方程 $\sin x=\lg x$ 有 3 个实根.

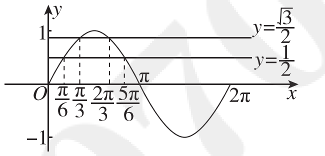


12. 4π 【解析】作出函数 $y=2\sin x\left(\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{2}\right)$ 的图象与直线 $y=2$(图略),由图可知函数 $y=2\sin x\left(\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{2}\right)$ 的图象与直线 $y=2$ 围成的封闭平面图形的面积相当于由直线 $x=\frac{\pi}{2}$,直线 $x=\frac{5\pi}{2}$,直线 $y=0$,直线 $y=2$ 围成的矩形面积,故此封闭图形的面积为 $2\times\left(\frac{5\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=4\pi$.

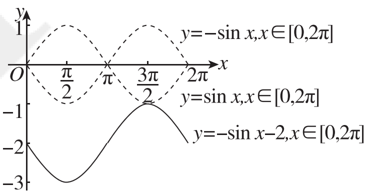
13. **解**:作出函数 $y=\sin x$ 在 $[0,2\pi]$ 上的图象,作出直线 $y=\frac{1}{2}$ 和 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$,如图所示.

由图可知,若 $x\in[0,2\pi]$,则当 $\frac{\pi}{6}<x\leqslant\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}\leqslant x<\frac{5\pi}{6}$ 时,不等式 $\frac{1}{2}<\sin x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$ 成立,

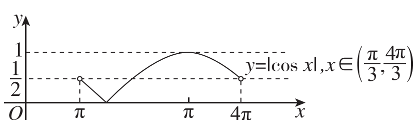
所以原不等式的解集为 $\left\{x\left|\frac{\pi}{6}+2k\pi<x\leqslant\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}\right.\right.$ 或 $\left.\frac{2\pi}{3}+2k\pi\leqslant x<\frac{5\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$.



14. **解**:先作出函数 $y=\sin x, x\in[0,2\pi]$ 的图象,
将该图象关于 x 轴作对称变换,
得到函数 $y=-\sin x, x\in[0,2\pi]$ 的图象,
然后将所得图象向下平移 2 个单位长度,得到函数 $y=-\sin x-2, x\in[0,2\pi]$ 的简图(如图所示).



15. ABC 【解析】作出 $y=|\cos x|, x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$ 的图象观察可知,当 $t<0$ 或 $t>1$ 时,$y=|\cos x|, x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{4}{3}\pi\right)$ 的图象与直线 $y=t$ 的交点个数为 0;当 $t=0$ 或 $t=1$ 或 $t=\frac{1}{2}$ 时,$y=|\cos x|, x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{4}{3}\pi\right)$ 的图象与直线 $y=t$ 的交点个数为 1;当 $0<t<\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{2}<t<1$ 时,$y=|\cos x|, x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{4}{3}\pi\right)$ 的图象与直线 $y=t$ 的交点个数为 2. 故选 ABC.

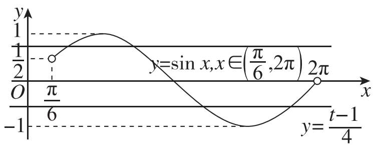


16. **解**:令 $f(x)=0$,可得 $\sin x=\frac{t-1}{4}$,可知两个函数在区间 $\left(\frac{\pi}{6},2\pi\right)$ 上的图象有两个交点,

作出函数 $y=\sin x$ 与 $y=\frac{t-1}{4}$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6},2\pi\right)$ 上的图象,如图所示,

则 $\frac{1}{2}<\frac{t-1}{4}<1$ 或 $-1<\frac{t-1}{4}<0$,

解得 $3<t<5$ 或 $-3<t<1$.



5.4.2 正弦函数、余弦函数的性质

第1课时 周期性与奇偶性

1. D 【解析】在 $f(x)=2\sin\frac{1}{2}x$ 中,$\omega=\frac{1}{2}$,∴$f(x)$的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$,故选 D.

2. C 【解析】由题意得 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}+2\pi\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin 2x,x\in\mathbf{R}$. 设 $y=f(x)=-\sin 2x$,则 $f(-x)=-\sin(-2x)=\sin 2x=-f(x)$,所以 $y=f(x)$为奇函数. 由奇函数的性质得其图象关于原点对称,故 C 正确. 故选 C.

3. B 【解析】对于函数 $f(x)=3\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$,令 $2x-\frac{\pi}{6}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12},k\in\mathbf{Z}$,所以 $f(x)$图象的对称轴方程为 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12},k\in\mathbf{Z}$,故选 B.

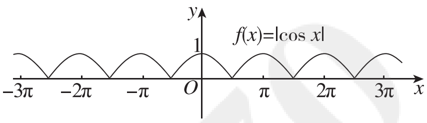
4. A 【解析】令 $x=\frac{\pi}{6}$,可得 $y=0$,所以函数图象关于点$\left(\frac{\pi}{6},0\right)$对称,故 A 正确,C 错误;令 $x=-\frac{\pi}{6}$,可得 $y=-\sqrt{3}$,所以函数图象既不关于点$\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$对称,也不关于直线 $x=-\frac{\pi}{6}$对称,故 B,D 错误. 故选 A.

5. D 【解析】易知 $y=-x\cos x$ 是奇函数,它的图象关于原点对称,∴排除 A,C;当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时,$y=-x\cos x<0$,排除 B. 故选 D.

6. A 【解析】由函数 $f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$的相邻两个零点之间的距离为$\frac{\pi}{6}$,可得$\frac{2\pi}{\omega}=2\times\frac{\pi}{6}$,解得 $\omega=6$,所以 $f(x)=\cos\left(6x+\frac{\pi}{4}\right)$,则 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(6\times\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 A.

7. D 【解析】∵函数 $f(x)$既是奇函数又是周期函数,且 $f(x)$的最小正周期为 π,∴$f\left(-\frac{5\pi}{3}\right)=f\left(-\frac{5\pi}{3}+2\pi\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$,又当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$时,$f(x)=\sin x$,∴$-f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,即 $f\left(-\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,故选 D.

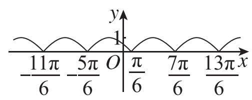
8. AC 【解析】对于 A,因为函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f(-x)=|\cos(-x)|=|\cos x|=f(x)$,所以函数 $f(x)$为偶函数,作出函数 $f(x)=|\cos x|$的图象如图所示,由图可知函数 $f(x)$的最小正周期为 π,所以 A 正确;对于 B,因为函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f(-x)=\sin(-2x)=-\sin 2x=-f(x)$,所以函数 $f(x)$为奇函数,所以 B 错误;对于 C,$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2x$,定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f(-x)=\cos(-2x)=\cos 2x=f(x)$,所以函数 $f(x)$为偶函数,又函数 $f(x)$的最小正周期为$\frac{2\pi}{2}=\pi$,所以 C 正确;对于 D,因为函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f(-x)=\cos\left(-\frac{x}{2}\right)=\cos\frac{x}{2}=f(x)$,所以函数 $f(x)$为偶函数,又函数 $f(x)$的最小正周期为$\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$,所以 D 错误. 故选 AC.



9. BD 【解析】对于 A,$y=\sin|x|$是偶函数,而 $y=\sin x$ 是奇函数,所以 $y=\sin|x|$的图象与 $y=\sin x$ 的图象不关于 y 轴对称,故 A 错误;对于 B,$y=\cos(-x)=\cos x$,$y=\cos|x|=\cos x$,所以 $y=\cos(-x)$的图象与 $y=\cos|x|$的图象相同,故 B 正确;对于 C,当 $x<0$ 时,$y=\sin|x|=\sin(-x)$,此时 $y=\sin|x|$的图象与 $y=\sin(-x)$的图象相同,故 C 错误;对于 D,$y=\cos(-x)=\cos x$,所以 $y=\cos x$ 的图象与 $y=\cos(-x)$的图象相同,故 D 正确. 故选 BD.

10. $\frac{\pi}{3}$(答案不唯一) 【解析】因为 $f(x)=2\sin(2x+3\varphi)$是奇函数,所以 $3\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,所以 $\varphi=\frac{k\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$,故可取 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

11. π 【解析】将函数 $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象位于 x 轴下方的部分翻折到 x 轴上方,位于 x 轴及 x 轴上方的部分保持不变,得到函数 $y=\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|$的图象,如图. ∵$y=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的最小正周期为 2π,∴$y=\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|$的最小正周期为 π.



12. $\sqrt{3}$ 【解析】因为定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$既是偶函数,又是周期函数,$f(x)$的最小正周期为 π,且当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时,$f(x)=\sin x$,所以 $f\left(\frac{2023\pi}{3}\right)=f\left(674\pi+\frac{\pi}{3}\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$f\left(\frac{2024\pi}{3}\right)=f\left(674\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $f\left(\frac{2023\pi}{3}\right)+f\left(\frac{2024\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

13. 解:(1)由 $\cos x+1\neq 0$,得 $x\neq 2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}$,
所以函数 $f(x)$的定义域为$\{x|x\neq 2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}\}$.

$f(x)=\dfrac{\sin^2x+\cos x+1}{\cos x+1}=\dfrac{1-\cos^2x+\cos x+1}{\cos x+1}=$

$\dfrac{-\cos^2x+\cos x+2}{\cos x+1}=\dfrac{(\cos x+1)(2-\cos x)}{\cos x+1}=2-\cos x$，

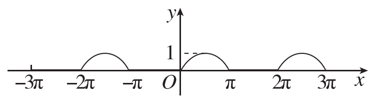
因为 $f(-x)=f(x)$，且函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，所以函数 $f(x)$ 为偶函数.

(2)因为 $f(x)=2-\cos x(x\neq 2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z})$，

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 2π.

14. 解：(1)$y=\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}|\sin x|=$

$\begin{cases}\sin x,x\in[2k\pi,2k\pi+\pi)(k\in\mathbf{Z}),\\0,x\in[2k\pi-\pi,2k\pi)(k\in\mathbf{Z}),\end{cases}$ 其图象如图所示.



(2)由(1)中图象可知，该函数是周期函数，且最小正周期是 2π.

15. B **【解析】**∵函数 $f(x)$ 对定义域内任意的 x 都满足 $f(x+6)=f(x)$，∴函数 $f(x)$ 的周期为 6，∴6 为函数 $f(x)$ 的最小正周期 T 的正整数倍，设 $6=Tk(k\in\mathbf{N}^*)$，则 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{2\pi}{\frac{6}{k}}=\dfrac{k\pi}{3}$，$k\in\mathbf{N}^*$，∴$A=\sin\left(\dfrac{k\pi}{3}x+\varphi+k\pi\right)(k\in\mathbf{N}^*)$，$B=\sin\left(\dfrac{k\pi}{3}x+\varphi-k\pi\right)=\sin\left(\dfrac{k\pi}{3}x+\varphi-k\pi+2k\pi\right)=\sin\left(\dfrac{k\pi}{3}x+\varphi+k\pi\right)(k\in\mathbf{N}^*)$，则 $A=B$. 故选 B.

16. 解：(1)证明：∵函数 $f(x)$ 对任意实数 x 都有 $f(x+2)=-\dfrac{1}{f(x)}(f(x)\neq 0)$，

∴$f(x+4)=-\dfrac{1}{f(x+2)}=f(x)$，

∴函数 $f(x)$ 是周期函数，且周期为 4.

(2)∵$f(2)=-\dfrac{1}{f(0)}=\dfrac{1}{2}$，∴$f(2024)=f(4\times 506)=f(0)=-2$，∴$f[f(2024)]=f(-2)=f(2)=\dfrac{1}{2}$.

第 2 课时　单调性、最大值与最小值

1. D **【解析】**由 $y=\sin x$ 的图象与性质得，$f(x)=|\sin x|$ 的单调递减区间为 $\left[\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\pi+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 D 符合题意. 故选 D.

2. C **【解析】**由题易知，当 $\cos x=-1$ 时，函数 $y=2-\cos x$ 取得最大值 3，此时 $x=-\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$. 故选 C.

3. D **【解析】**由 $2k\pi\leqslant x-\dfrac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$，得 $2k\pi+\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\dfrac{7\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，令 $k=0$，得 $\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{7x}{6}$，故可排除 A，B，C；当 $k=1$ 时，$\dfrac{13\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{19\pi}{6}$，而 $\left(\dfrac{7\pi}{3},3\pi\right)\subsetneqq\left(\dfrac{13\pi}{6},\dfrac{19\pi}{6}\right)$，故 D 正确. 故选 D.

4. A **【解析】**由 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，可得 $2x+\dfrac{\pi}{3}\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}\right]$，则 $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\in\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right]$. 故选 A.

5. C **【解析】**∵$\sin 168^\circ=\sin(180^\circ-12^\circ)=\sin 12^\circ$，$\cos 10^\circ=\sin(90^\circ-10^\circ)=\sin 80^\circ$，且 $y=\sin x$ 在 $[0^\circ,90^\circ]$ 上单调递增，∴$\sin 11^\circ<\sin 12^\circ<\sin 80^\circ$，即 $\sin 11^\circ<\sin 168^\circ<\cos 10^\circ$. 故选 C.

6. A **【解析】**因为 $f(x)=\cos(x+\theta)(0<\theta<\pi)$ 在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处取得最小值，所以 $\dfrac{\pi}{3}+\theta=\pi$，解得 $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$，故 $f(x)=\cos\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$. 令 $2k\pi-\pi\leqslant x+\dfrac{2\pi}{3}\leqslant 2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $2k\pi-\dfrac{5\pi}{3}\leqslant x\leqslant 2k\pi-\dfrac{2\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[2k\pi-\dfrac{5\pi}{3},2k\pi-\dfrac{2\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$，所以 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的单调递增区间为 $\left[\dfrac{\pi}{3},\pi\right]$，故选 A.

7. A **【解析】**$f(x)=1-2\sin^2x+k(1-\sin x)=-2\sin^2x-k\sin x+k+1=-2\left(\sin^2x+\dfrac{k}{2}\sin x\right)+k+1=-2\left(\sin x+\dfrac{k}{4}\right)^2+\dfrac{k^2}{8}+k+1$，∵$k<-4$，∴$\dfrac{k}{4}<-1$，∴$-\dfrac{k}{4}>1$，又 $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$，∴当 $\sin x=1$ 时，$f(x)$ 取得最大值 -1，故选 A.

8. AC **【解析】**由 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x+\dfrac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $2k\pi-\dfrac{3\pi}{4}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$. 当 $k=0$ 时，可得 $x\in\left[-\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$，当 $k=1$ 时，可得 $x\in\left[\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{9\pi}{4}\right]$，故选 AC.

9. AC **【解析】**函数 $f(x)=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$. 对于选项 A，$f(x)$ 的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，选项 A 中说法错误；对于选项 B，由 $x\in\left[-\dfrac{5\pi}{12},-\dfrac{\pi}{6}\right]$，得 $2x+\dfrac{\pi}{6}\in\left[-\dfrac{2\pi}{3},-\dfrac{\pi}{6}\right]$，故 $f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{5\pi}{12},-\dfrac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增，选项 B 中说法正确；对于选项 C，由 $2x+\dfrac{\pi}{6}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $x=\dfrac{k\pi}{2}-\dfrac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$，故 $f(x)$ 的图象不关于直线 $x=\dfrac{7\pi}{6}$ 对称，选项 C 中说法错误；对于选项 D，由 $2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，当 $k=2$ 时，$x=\dfrac{7\pi}{6}$，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\dfrac{7\pi}{6},0\right)$ 对称，选项 D 中说法正确. 故选 AC.

10. $\sin\dfrac{3\pi}{5}>\sin\dfrac{4\pi}{5}>\sin\dfrac{9\pi}{10}$ **【解析】**因为 $\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{3\pi}{5}<\dfrac{4\pi}{5}<\dfrac{9\pi}{10}<\pi$，且函数 $y=\sin x$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 上单调递减，所以 $\sin\dfrac{3\pi}{5}>\sin\dfrac{4\pi}{5}>\sin\dfrac{9\pi}{10}$.

11. $\left[\dfrac{5\pi}{12}+k\pi,\dfrac{11\pi}{12}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$ **【解析】**由题意得 $y=2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)+1=-2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)+1$，则问题转化为求

$y=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)-1$ 的单调递减区间. 令 $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得 $\dfrac{5\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{11\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,所以函数 $y=2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)+1$ 的单调递增区间是 $\left[\dfrac{5\pi}{12}+k\pi,\dfrac{11\pi}{12}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$.

12. $\left(0,\dfrac{2}{9}\right]$ **[解析]** 因为 $0<x<\dfrac{3\pi}{2}$,所以 $-\dfrac{\pi}{3}<\omega x-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{3\omega\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}$. 由 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 上为单调函数及余弦函数的单调性,可得 $\dfrac{3\omega\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}\leqslant 0$,所以 $0<\omega\leqslant\dfrac{2}{9}$.

13. **解:**(1) $f(x)$ 的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

当 $2k\pi\leqslant 2x-\dfrac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}$,即 $k\pi+\dfrac{\pi}{8}\leqslant x\leqslant k\pi+\dfrac{5\pi}{8}$,$k\in\mathbf{Z}$ 时,$f(x)$ 单调递减,

$\therefore f(x)$ 的单调递减区间是 $\left[k\pi+\dfrac{\pi}{8},k\pi+\dfrac{5\pi}{8}\right],k\in\mathbf{Z}$.

(2) $\because x\in\left[-\dfrac{\pi}{8},\dfrac{\pi}{2}\right]$,$\therefore 2x-\dfrac{\pi}{4}\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right]$,

$\therefore\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)\in\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right]$,

$\therefore f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{8},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为 1,

此时 $2x-\dfrac{\pi}{4}=0$,即 $x=\dfrac{\pi}{8}$;

$f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{8},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值为 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

此时 $2x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}$,即 $x=\dfrac{\pi}{2}$.

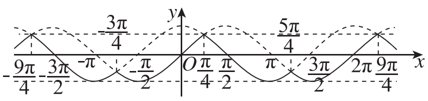
14. **解:**(1)由题意知,若 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$,则 $2x+\dfrac{\pi}{6}\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6}\right]$,

所以 $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)\in\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$,

又因为 $a>0$,所以 $\begin{cases}a+b=3,\\-\dfrac{1}{2}a+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\b=1,\end{cases}$ 故 $g(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+1$.

(2)因为 $x\in(0,\pi)$,所以 $2x+\dfrac{\pi}{6}\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{13\pi}{6}\right)$,函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{13\pi}{6}\right)$ 上的单调递增区间为 $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 和 $\left[\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{13\pi}{6}\right)$,所以 $\dfrac{\pi}{6}<2x+\dfrac{\pi}{6}\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\dfrac{3\pi}{2}\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{13\pi}{6}$,解得 $0<x\leqslant\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\dfrac{2\pi}{3}\leqslant x<\pi$,所以 $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的单调递增区间为 $\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right]$ 和 $\left[\dfrac{2\pi}{3},\pi\right)$.

15. AD **[解析]** 当 $\sin x\geqslant\cos x$ 时,$f(x)=\cos x$,当 $\sin x<\cos x$ 时,$f(x)=\sin x$,由此可作出函数 $f(x)$ 的图象,如图中实线所示. 对于 A,结合图象可知 $f(x)$ 的最小正周期为 2π,A 正确;对于 B,结合图象可知 $f(x)$ 的最大值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,B 错误;对于 C,结合图象可知,当 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$ 时,$f(x)$ 单调递增,当 $x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时,$f(x)$ 单调递减,即 $f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上不单调,C 错误;对于 D,结合图象可知,$f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 对称,D 正确. 故选 AD.



16. **解:**(1)由题意知 $A=4$,$\dfrac{T}{2}=\dfrac{7\pi}{12}-\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{2}$,

$\therefore T=\pi$,$\therefore\omega=\dfrac{2\pi}{T}=2$.

当 $x=\dfrac{\pi}{12}$ 时,$f(x)$ 取得最大值 4,则 $4\sin\left(2\times\dfrac{\pi}{12}+\varphi\right)=4$,

得 $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\varphi\right)=1$,

得 $\dfrac{\pi}{6}+\varphi=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi,n\in\mathbf{Z}$,得 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}+2n\pi,n\in\mathbf{Z}$,

$\because|\varphi|<\pi$,$\therefore\varphi=\dfrac{\pi}{3}$,$\therefore f(x)=4\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

(2)由 $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得 $\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant 2x\leqslant\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得 $\dfrac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{7\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\dfrac{\pi}{12}+k\pi,\dfrac{7\pi}{12}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$.

(3)由题意知,关于 x 的方程 $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{m-1}{4}$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{6}\right]$ 上有两个根,

$\because x\in\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{6}\right]$,$\therefore 2x+\dfrac{\pi}{3}\in\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right]$,

$\therefore\dfrac{m-1}{4}\in\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right)$,$\therefore m\in[2\sqrt{3}+1,5)$.

5.4.3 正切函数的性质与图象

1. D **[解析]** 由 $x-\dfrac{\pi}{4}\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,得 $x\neq k\pi+\dfrac{3\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$,即该函数的定义域是 $\left\{x\,\middle|\,x\neq k\pi+\dfrac{3\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$. 故选 D.

2. C **[解析]** 由题意得定义域关于原点对称,又 $\tan|-x|=\tan|x|$,故原函数是偶函数,其图象关于 y 轴对称,故选 C.

3. A **[解析]** 设 $z=x-\dfrac{\pi}{6}$,因为 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{12}\right)$,所以 $z\in\left(-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{4}\right)$. 因为正切函数 $y=\tan z$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增,且 $\tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$,$\tan\dfrac{\pi}{4}=1$,所以原函数的值域为 $(-\sqrt{3},1)$. 故选 A.

4. B **[解析]** 由 $2x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,得 $x=\dfrac{k\pi}{4}+\dfrac{\pi}{12},k\in\mathbf{Z}$. 当 $k=0$ 时,可得 $x=\dfrac{\pi}{12}$,点 $\left(\dfrac{\pi}{12},0\right)$ 是函数 $y=\tan\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象的对称中心,故 A 不符合题意;当 $k=1$ 时,可得 $x=\dfrac{\pi}{3}$,

点$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$是函数$y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象的对称中心，故D不符合题意；当$k=-2$时，可得$x=-\frac{5\pi}{12}$，点$\left(-\frac{5\pi}{12},0\right)$是函数$y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象的对称中心，故C不符合题意；点$\left(\frac{\pi}{6},0\right)$不是函数$y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象的对称中心，故B符合题意. 故选B.

5. A **【解析】** 易知$\frac{\pi}{4}<1<\frac{\pi}{2}$. 因为函数$y=\sin x$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增，所以$1>b=\sin 1>\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 因为函数$y=\cos x$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减，所以$0<a=\cos 1<\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 因为函数$y=\tan x$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增，所以$c=\tan 1>\tan\frac{\pi}{4}=1$，所以$a<\frac{\sqrt{2}}{2}<b<1<c$，即$a<b<c$. 故选A.

6. B **【解析】** $f(x)=\cos x|\tan x|=\begin{cases}\sin x,\tan x\geqslant 0,\\-\sin x,\tan x<0,\end{cases}$其定义域为$\left\{x\middle|x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$. 当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$f(x)=\sin x>0$；当$x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时，$f(x)=-\sin x<0$；当$x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$时，$f(x)=\sin x<0$；当$x\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$时，$f(x)=-\sin x>0$. 结合定义域可知B中图象符合题意. 故选B.

7. C **【解析】** 由函数$f(x)=\tan\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$的最小正周期为$\pi$，可得$\frac{\pi}{\omega}=\pi$，解得$\omega=1$，即$f(x)=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，令$-\frac{\pi}{2}+k\pi<x+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得$-\frac{3\pi}{4}+k\pi<x<\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，当$k=1$时，$\frac{\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{4}$，即函数$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$上单调递增，又$f(0)=f(\pi)$，$f\left(-\frac{\pi}{5}\right)=f\left(-\frac{\pi}{5}+\pi\right)=f\left(\frac{4\pi}{5}\right)$，$\pi>\frac{4\pi}{5}>2$，所以$f(0)>f\left(-\frac{\pi}{5}\right)>f(2)$. 故选C.

8. AC **【解析】** $\because -\tan 2=\tan(\pi-2)$，且$0<1<\pi-2<\frac{\pi}{2}$，$y=\tan x$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增，$\therefore \tan 1<-\tan 2$，选项A中不等式成立；$\because \tan 375^\circ=\tan(360^\circ+15^\circ)=\tan 15^\circ$，$\tan 800^\circ=\tan(720^\circ+80^\circ)=\tan 80^\circ$，$y=\tan x$在$(0^\circ,90^\circ)$上单调递增，$\therefore \tan 15^\circ<\tan 80^\circ$，即$\tan 375^\circ<\tan 800^\circ$，选项B中不等式不成立；$\because \frac{\pi}{2}<\frac{4\pi}{7}<\frac{6\pi}{7}<\pi$，$y=\tan x$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上单调递增，$\therefore \tan\frac{6\pi}{7}>\tan\frac{4\pi}{7}$，选项C中不等式成立；$\tan\frac{9\pi}{8}=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{8}\right)=\tan\frac{\pi}{8}<\tan\frac{\pi}{7}$，选项D中不等式不成立. 故选AC.

9. BD **【解析】** $f(x)$在整个定义域内没有单调性，故A错误；$f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\tan 2x$，易知$y=\tan 2x$是奇函数，故B正确；函数$f(x)$的最小正周期$T=\frac{\pi}{2}$，故C错误；令$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，解得$x=\frac{k\pi}{4}-\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$，所以$f(x)$图象的对称中心是$\left(\frac{k\pi}{4}-\frac{\pi}{6},0\right),k\in\mathbf{Z}$，故D正确. 故选BD.

10. $\left(k\pi+\frac{\pi}{3},0\right),k\in\mathbf{Z}$ **【解析】** 由$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{k}{2}\pi,k\in\mathbf{Z}$，得$\frac{x}{2}=\frac{k}{2}\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$，即$x=k\pi+\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$，所以函数$f(x)=2\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$的图象的对称中心为$\left(k\pi+\frac{\pi}{3},0\right)$，$k\in\mathbf{Z}$.

11. 0 **【解析】** 由题意得函数$f(x)$的最小正周期$T=\frac{\pi}{\omega}=\frac{\pi}{4}$，$\therefore \omega=4$，$\therefore f(x)=\tan 4x$，$\therefore f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\tan\pi=0$.

12. 0 **【解析】** $f(x)=\tan\frac{\pi x}{3}$的最小正周期$T=\frac{\pi}{\frac{\pi}{3}}=3$. 因为$f(1)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，$f(2)=\tan\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$，$f(3)=\tan\pi=0$，所以$f(1)+f(2)+f(3)=0$，又$\frac{2025}{3}=675$，所以$f(1)+f(2)+\cdots+f(2025)=675\times 0=0$.

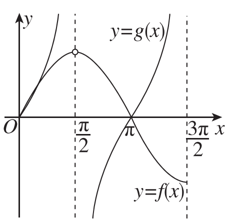
13. **解：**(1)令$f(x)=g(x)$，得$2\sin x=\sqrt{3}\tan x=\frac{\sqrt{3}\sin x}{\cos x}$，

$\therefore \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$或$\sin x=0$，

又$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$，$\therefore x=\frac{\pi}{6}$或$x=\pi$，

又$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=1$，$f(\pi)=0$，$\therefore$函数$f(x)$与$g(x)$的图象的交点坐标为$\left(\frac{\pi}{6},1\right)$，$(\pi,0)$.

(2)作出两函数的图象如图所示.



①由图象可知满足$f(x)>g(x)$的实数x的取值范围为$\left(0,\frac{\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

②由图象可知$f(x)$和$g(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上具有相同的单调性，且单调递增.

14. **解：**(1)因为$f(x)=3\tan\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4}\right)=-3\tan\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$，所以$f(x)$的最小正周期$T=\frac{\pi}{\frac{1}{4}}=4\pi$.

令$k\pi-\frac{\pi}{2}<\frac{x}{4}-\frac{\pi}{6}<k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得$4k\pi-\frac{4\pi}{3}<x<4k\pi+\frac{8\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，

所以$y=3\tan\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$在$\left(4k\pi-\frac{4\pi}{3},4k\pi+\frac{8\pi}{3}\right)(k\in\mathbf{Z})$上

单调递增,所以 $f(x)=3\tan\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4}\right)$ 在 $\left(4k\pi-\frac{4\pi}{3},4k\pi+\frac{8\pi}{3}\right)(k\in\mathbf{Z})$ 上单调递减.

故函数 $f(x)$ 的最小正周期为 4π,其单调递减区间为 $\left(4k\pi-\frac{4\pi}{3},4k\pi+\frac{8\pi}{3}\right)(k\in\mathbf{Z})$.

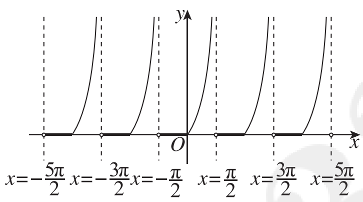
(2) $f(\pi)=3\tan\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)=3\tan\left(-\frac{\pi}{12}\right)=-3\tan\frac{\pi}{12}$,

$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=3\tan\left(\frac{\pi}{6}-\frac{3\pi}{8}\right)=3\tan\left(-\frac{5\pi}{24}\right)=-3\tan\frac{5\pi}{24}$,

因为 $0<\frac{\pi}{12}<\frac{5\pi}{24}<\frac{\pi}{2}$,且 $y=\tan x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增,

所以 $\tan\frac{\pi}{12}<\tan\frac{5\pi}{24}$,所以 $f(\pi)>f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

15. CD **【解析】** $f(x)=\tan x+|\tan x|=\begin{cases}2\tan x, x\in\left[k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right), k\in\mathbf{Z},\\ 0, x\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,k\pi\right), k\in\mathbf{Z},\end{cases}$ 作出 $f(x)$ 的图象,如图所示.由图可知 $f(x)$ 的最小正周期为 π,A 错误;$f(x)$ 的图象没有对称中心,B 错误;$f(x)$ 的值域为 $[0,+\infty)$,C 正确;不等式 $f(x)>2$ 等价于当 $x\in\left[k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$ 时,$2\tan x>2$,得 $\tan x>1$,解得 $\frac{\pi}{4}+k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,所以 $f(x)>2$ 的解集为 $\left(\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$,D 正确.故选 CD.



16. **解:**(1)当 $\theta=-\frac{\pi}{6}$ 时,$f(x)=x^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}x-1=\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-\frac{4}{3}$. $\because x\in[-1,\sqrt{3}]$,$\therefore$ 当 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时,$f(x)$ 取得最小值 $-\frac{4}{3}$,当 $x=-1$ 时,$f(x)$ 取得最大值 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(2) $f(x)=(x+\tan\theta)^2-1-\tan^2\theta$ 是关于 x 的二次函数,其图象的对称轴为直线 $x=-\tan\theta$.

$\because f(x)$ 在区间 $[-1,\sqrt{3}]$ 上单调,$\therefore -\tan\theta\leqslant-1$ 或 $-\tan\theta\geqslant\sqrt{3}$,即 $\tan\theta\geqslant1$ 或 $\tan\theta\leqslant-\sqrt{3}$. 又 $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,$\therefore\theta$ 的取值范围是 $\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$.

5.5 三角恒等变换

5.5.1 两角和与差的正弦、余弦和正切公式

第1课时 两角差的余弦公式

1. B **【解析】** $\cos20^\circ=\cos(30^\circ-10^\circ)=\cos30^\circ\cos10^\circ+\sin30^\circ\sin10^\circ$,故选 B.

2. D **【解析】** $\sin\frac{8\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}=\cos\left(\frac{8\pi}{9}-\frac{2\pi}{9}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$.

3. C **【解析】** $\sin20^\circ\cos10^\circ+\sin10^\circ\sin70^\circ=\cos70^\circ\cos10^\circ+\sin70^\circ\sin10^\circ=\cos(70^\circ-10^\circ)=\cos60^\circ=\frac{1}{2}$.

4. C **【解析】** $\because\sin\alpha=\frac{3}{5}$,$\alpha$ 是第二象限角,$\therefore\cos\alpha=-\frac{4}{5}$,$\therefore\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{6}+\sin\alpha\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$.

5. A **【解析】** 由 $\sin A\sin B<\cos A\cos B$,得 $\cos A\cos B-\sin A\sin B>0$,即 $\cos A\cos(-B)+\sin A\sin(-B)>0$,即 $\cos[A-(-B)]>0$,即 $\cos(A+B)>0$,则 $\cos C<0$,故 $\triangle ABC$ 一定为钝角三角形,故选 A.

6. D **【解析】** 因为 $\cos\frac{4\alpha}{3}\cos\frac{\alpha}{3}+\sin\frac{4\alpha}{3}\sin\frac{\alpha}{3}=0$,所以 $\cos\left(\frac{4\alpha}{3}-\frac{\alpha}{3}\right)=0$,即 $\cos\alpha=0$,又 $\alpha\in[0,\pi]$,所以 $\alpha=\frac{\pi}{2}$,故选 D.

7. D **【解析】** 因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,$\cos\alpha=\frac{3}{5}$,所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{4}{5}$. 因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,$0<\beta<\pi$,所以 $0<\alpha+\beta<\frac{3\pi}{2}$. 因为 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{3}<\sin\alpha=\frac{4}{5}$,所以若 $\alpha+\beta$ 为锐角,则 $\alpha+\beta<\alpha$,与 $\alpha+\beta>\alpha$ 矛盾,所以 $\alpha+\beta$ 不可能是锐角,故 $\cos(\alpha+\beta)=-\sqrt{1-\sin^2(\alpha+\beta)}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$,所以 $\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=\frac{-6\sqrt{2}+4}{15}$. 故选 D.

8. ABD **【解析】** 由 $\sin\alpha\sin\beta=-\cos\alpha\cos\beta$ 可得 $\cos(\alpha-\beta)=0$,因此 $\alpha-\beta=k\cdot180^\circ+90^\circ$,$k\in\mathbf{Z}$. 对于 A,$\alpha=\beta=90^\circ$,$\alpha-\beta=0^\circ$,A 满足题意;对于 B,$\alpha=18^\circ$,$\beta=72^\circ$,$\alpha-\beta=-54^\circ$,B 满足题意;对于 C,$\alpha=130^\circ$,$\beta=40^\circ$,$\alpha-\beta=90^\circ$,C 不满足题意;对于 D,$\alpha=140^\circ$,$\beta=40^\circ$,$\alpha-\beta=100^\circ$,D 满足题意. 故选 ABD.

9. AC **【解析】** 因为 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$,所以 $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\pm\frac{4}{5}$,又 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{12}{13}$,所以 $\sin(\alpha+\beta)=\pm\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\pm\frac{5}{13}$,$\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha=-\frac{12}{13}\times\frac{3}{5}=-\frac{36}{65}$. $\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha$,若 $\sin\alpha$ 与 $\sin(\alpha+\beta)$ 同号,即 $\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=\frac{20}{65}$,则 $\cos\beta=-\frac{16}{65}$;若 $\sin\alpha$ 与 $\sin(\alpha+\beta)$ 异号,即 $\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=-\frac{20}{65}$,则 $\cos\beta=-\frac{56}{65}$. 所以 $\cos\beta$ 的值可能为 $-\frac{16}{65}$ 或 $-\frac{56}{65}$. 故选 AC.

10. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ 【解析】方法一：$\cos(-75°)=\cos(-30°-45°)=\cos(-30°)\cos 45°+\sin(-30°)\sin 45°=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

方法二：$\cos(-75°)=\cos 75°=\cos[30°-(-45°)]=\cos 30°\cos(-45°)+\sin 30°\sin(-45°)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

11. $-\frac{3}{5}$ 【解析】由 $\cos(\alpha-\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha-\beta)\sin\alpha=-\frac{4}{5}$，可得 $\cos[(\alpha-\beta)-\alpha]=-\frac{4}{5}$，即 $\cos(-\beta)=-\frac{4}{5}$，∴$\cos\beta=-\frac{4}{5}$. 又 β 是第三象限角，故 $\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\frac{3}{5}$.

12. $\frac{1}{2}$ 【解析】由 $\sin\alpha-\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\alpha-\cos\beta=\frac{1}{2}$，得 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta=\frac{3}{4}$，$\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{4}$，以上两式相加得 $2-2(\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta)=1$，所以 $\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}$，故 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}$.

13. **解**：由题意可知 $0<\alpha+\beta<\pi$，∴ $\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\frac{63}{65}$.

∵$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，∴$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，

∴$\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=-\frac{16}{65}\times\frac{3}{5}+\frac{63}{65}\times\frac{4}{5}=\frac{204}{325}$.

14. **解**：∵点 A 为单位圆上一点，$\angle xOA=\frac{\pi}{3}$，点 A 沿单位圆逆时针方向旋转角 α 到点 $B\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$，

∴$A\left(\cos\frac{\pi}{3},\sin\frac{\pi}{3}\right)$，即 $A\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，且 $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=-\frac{3}{5}$，$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{4}{5}$，则 $\cos\alpha=\cos\left[\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\frac{\pi}{3}\right]=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\cos\frac{\pi}{3}+\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$.

15. AC 【解析】由两角差的余弦公式知，$\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\varphi=-\frac{1}{2}$，故 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$ 和 $\varphi=\frac{11\pi}{6}$ 满足题意，$\varphi=-\frac{\pi}{3}$ 和 $\varphi=\frac{\pi}{3}$ 不满足题意，故选 AC.

16. **解**：∵$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，∴$-\frac{\pi}{4}<-\frac{\beta}{2}<0$，又∵$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，∴$\frac{\pi}{4}<\alpha-\frac{\beta}{2}<\pi$.

又 $\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{5}{13}>0$，∴$\frac{\pi}{4}<\alpha-\frac{\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$，$\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{12}{13}$.

∵$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，∴$\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$，

又∵$-\frac{\pi}{2}<-\beta<0$，∴$-\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}-\beta<\frac{\pi}{2}$，

又 $\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)=-\frac{3}{5}$，∴$-\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}-\beta<0$，$\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)=\frac{4}{5}$，∴$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\left[\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)\right]=\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)=\frac{5}{13}\times\frac{4}{5}+\frac{12}{13}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{16}{65}$.

第2课时　两角和与差的正弦、余弦、正切公式

1. A 【解析】$\sin 75°=\sin(45°+30°)=\sin 45°\cos 30°+\cos 45°\sin 30°=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

2. B 【解析】$\sin 70°\cos 25°+\sin 20°\cos 115°=\cos 20°\cos 25°-\sin 20°\sin 25°=\cos(20°+25°)=\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故选 B.

3. D 【解析】因为 $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$，所以 $\tan(\alpha+\beta)=\tan\frac{3\pi}{4}$，即 $\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-1$，所以 $\tan\alpha+\tan\beta=\tan\alpha\tan\beta-1$，所以 $(1-\tan\alpha)(1-\tan\beta)=1-(\tan\alpha+\tan\beta)+\tan\alpha\tan\beta=1-(\tan\alpha\tan\beta-1)+\tan\alpha\tan\beta=2$，故选 D.

4. C 【解析】因为 $\cos B=\frac{3}{5}$，$B\in(0,\pi)$，所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{4}{5}$. 又 $A=\frac{\pi}{4}$，所以 $\sin C=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{3}{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{4}{5}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$. 故选 C.

5. D 【解析】因为 $f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)=-\sqrt{2}\sin x$，所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{1}=2\pi$. 因为 $f(-x)=-\sqrt{2}\sin(-x)=\sqrt{2}\sin x=-f(x)$，所以函数 $f(x)$ 为奇函数. 故选 D.

6. A 【解析】∵$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}>0$，$\theta$ 为锐角，∴$\theta+\frac{\pi}{6}$ 为锐角，∴$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{4}{5}$，∴$\sin\theta=\sin\left[\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$. 故选 A.

7. D 【解析】∵$\alpha\in(0,\pi)$，$\beta\in(0,\pi)$，$\sin(\alpha-\beta)=\frac{3}{4}$，$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}=$

-5，∴ $\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{3}{4}$，$\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}=-5$，∴$\sin\alpha\cos\beta=\frac{5}{8}$，$\cos\alpha\sin\beta=-\frac{1}{8}$，∴ $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}$，且 $0<\beta<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，∴$\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\frac{3\pi}{2}$，∴$\alpha+\beta=\frac{5\pi}{6}$. 故选 D.

8. BC **【解析】** 角 α 的终边在直线 $y=\sqrt{3}x$ 上，当角 α 的终边在第一象限时，$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\alpha=\frac{1}{2}$，则 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{6}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$；当角 α 的终边在第三象限时，$\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\alpha=-\frac{1}{2}$，所以 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{6}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$. 故选 BC.

9. ACD **【解析】** $|OP_2|=\sqrt{\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}=1$，$|OP_3|=\sqrt{\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}=1$，故 $|OP_2|=|OP_3|=1$，故 A 正确；$|P_2P_3|=$
$\sqrt{\left[\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\right]^2+\left[\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\right]^2}=$
$\sqrt{2-2\left[\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\right]}=$
$\sqrt{2-2\cos\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\right]}=\sqrt{2}$，故 B 错误；若点 P_1，P_2 关于 y 轴对称，则 $\cos\alpha=-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$ 且 $\sin\alpha=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$，∴$\tan\alpha=\sqrt{3}$，∴$\alpha=\frac{\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，故 C 正确；当 $\alpha=\frac{13\pi}{12}$ 时，$P_1(\cos\alpha,\sin\alpha)$，即 $P_1\left(-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$，$P_3\left(\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right),\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\right)$，即 $P_3\left(-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$，∴点 P_1，P_3 关于 x 轴对称，故 D 正确. 故选 ACD.

10. 3 **【解析】** 令 $\theta=\alpha-\frac{\pi}{12}$，则 $\alpha=\theta+\frac{\pi}{12}$，$\tan\theta=-2$，则 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\tan\left(\theta+\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{3}\right)=\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\theta-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\theta\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{-2-1}{1+(-2)\times1}=3$.

11. $\frac{\sqrt{2}}{10}$ **【解析】** ∵$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{10}}{10}$，且 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，∴ $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos(\alpha-\beta)=\sqrt{1-\sin^2(\alpha-\beta)}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，∴ $\cos(2\alpha-\beta)=\cos[(\alpha-\beta)+\alpha]=\cos(\alpha-\beta)\cos\alpha-\sin(\alpha-\beta)\sin\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{5}}{5}-\frac{\sqrt{10}}{10}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{2}}{10}$.

12. $\frac{\sqrt{2}}{10}$ 或 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **【解析】** 当 A，B 均为锐角时，$\cos A=\sqrt{1-\sin^2A}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos B=\sqrt{1-\sin^2B}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，所以 $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B=\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}-\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{10}$；当 A 为钝角，B 为锐角时，因为 $\sin A=\sin(\pi-A)>\sin B$，且 $0<\pi-A<\frac{\pi}{2}$，$0<B<\frac{\pi}{2}$，所以 $\pi-A>B$，即 $A+B<\pi$，符合要求，所以 $\cos A=-\sqrt{1-\sin^2A}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos B=\sqrt{1-\sin^2B}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，所以 $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B=\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}-\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$；当 A 为锐角，B 为钝角时，因为 $\sin A>\sin(\pi-B)=\sin B$，且 $0<\pi-B<\frac{\pi}{2}$，$0<A<\frac{\pi}{2}$，所以 $\pi-B<A$，即 $A+B>\pi$，不符合要求；显然 A，B 不可能同时为钝角. 综上可知，$\sin(A-B)$的值为 $\frac{\sqrt{2}}{10}$或$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

13. 解：(1)∵$P\left(-\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$在角 α 的终边上，

∴$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，∴$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$.

(2)由(1)知 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，∴$\tan\alpha=-\frac{3}{4}$，

∴$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\frac{-\frac{3}{4}+\tan\beta}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\tan\beta}=\frac{1}{2}$，

∴$\tan\beta=2$.

14. 解：(1)∵$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，∴$\frac{\pi}{4}<\alpha+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$，

又 $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{1}{3}$，∴$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

∵$-\frac{\pi}{2}<\beta<0$，∴$\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$，

又 $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，∴$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

∴$\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)=\cos\left[\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$.

(2)∵$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$,∴$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\beta}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

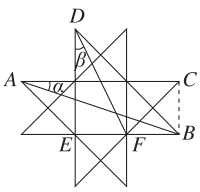
∴$\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,等号两边同时平方得 $1+2\cos\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}=\frac{6}{9}$,即 $1+\sin\beta=\frac{2}{3}$,∴$\sin\beta=-\frac{1}{3}$.

(3)∵$\cos\alpha=\cos\left[\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\frac{\pi}{4}+\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{4+\sqrt{2}}{6}$,$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,∴$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{4-\sqrt{2}}{6}$.由(2)知 $\sin\beta=-\frac{1}{3}$,

∵$-\frac{\pi}{2}<\beta<0$,∴$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,∴$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{4+\sqrt{2}}{6}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3}\times\frac{4-\sqrt{2}}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又 $0<\alpha-\beta<\pi$,∴$\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$.

15. B 【解析】连接 BC,如图所示.在 Rt△ABC 中,$BC=2$,$AC=6$,则 $\tan\alpha=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{3}$.在 Rt△$DEF$ 中,$EF=2$,$DE=4$,则 $\tan\beta=\frac{EF}{DE}=\frac{1}{2}$.所以 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}=1$,又 $\alpha,\beta\in(0°,45°)$,所以 $\alpha+\beta=45°$,故选 B.



16. 解:由题意知 $\cos(140°-\alpha)+\sin(110°+\alpha)=\sin(130°-\alpha)$,
即 $-\cos(40°+\alpha)+\cos(20°+\alpha)=\cos(40°-\alpha)$,
故 $\cos(20°+\alpha)=\cos(40°-\alpha)+\cos(40°+\alpha)$,
即 $\cos 20°\cos\alpha-\sin 20°\sin\alpha=2\cos 40°\cos\alpha$,
故 $\cos 20°\cos\alpha-2\cos 40°\cos\alpha=\sin 20°\sin\alpha$,
则 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos 20°-2\cos 40°}{\sin 20°}=$

$\frac{\cos(30°-10°)-2\cos(30°+10°)}{\sin 20°}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 10°+\frac{3}{2}\sin 10°}{\sin 20°}=$

$\frac{\sqrt{3}\sin(10°-30°)}{\sin 20°}=\frac{-\sqrt{3}\sin 20°}{\sin 20°}=-\sqrt{3}$.

第3课时　二倍角的正弦、余弦、正切公式

1. C 【解析】$\sin^2 75°-\sin^2 15°=\sin^2(90°-15°)-\sin^2 15°=\cos^2 15°-\sin^2 15°=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.故选 C.

2. C 【解析】由 $\tan x=2$,得 $\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=-\frac{4}{3}$,故选 C.

3. C 【解析】因为 $\sin\theta=\frac{1}{3}$ 且 $\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,所以 $\cos\theta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$,所以 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$.故选 C.

4. C 【解析】由题意可得 $P(-1,2)$,得 $r=|OP|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$,所以 $\cos\alpha=\frac{-1}{\sqrt{5}}$,则 $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\times\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)^2-1=-\frac{3}{5}$.故选 C.

5. C 【解析】∵$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\times\frac{12}{13}\times\left(-\frac{5}{13}\right)<0$,$\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=\left(-\frac{5}{13}\right)^2-\left(\frac{12}{13}\right)^2<0$,∴$\alpha$ 是第三象限角.

6. A 【解析】$\sin\left(2\alpha+\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\cos 2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=2\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-1=2\times\frac{9}{25}-1=-\frac{7}{25}$,故选 A.

7. A 【解析】∵ $m=2\sin 18°$,∴ $\frac{2m\sqrt{4-m^2}}{1-2\sin^2 27°}=\frac{4\sin 18°\sqrt{4-(2\sin 18°)^2}}{\cos 54°}=\frac{4\sin 18°\cdot 2\cos 18°}{\sin 36°}=\frac{4\sin 36°}{\sin 36°}=4$.

8. B 【解析】因为 $\sin(\pi-x)=2\sin\left(\frac{11\pi}{2}-x\right)$,所以 $\sin x=-2\cos x$,即 $\tan x=-2$,所以 $3\sin 2x+4\cos 2x=\frac{6\sin x\cos x+4(\cos^2 x-\sin^2 x)}{\sin^2 x+\cos^2 x}=\frac{6\tan x+4(1-\tan^2 x)}{\tan^2 x+1}=\frac{-12+4\times(1-4)}{4+1}=-\frac{24}{5}$.故选 B.

9. ABD 【解析】对于 A 选项,$2\cos 15°\cos 75°=2\sin 15°\cos 15°=\sin 30°=\frac{1}{2}$,故 A 正确;对于 B 选项,$\frac{\sqrt{3}}{2}+2\sin^2 15°=\frac{\sqrt{3}}{2}+1-\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}+1-\frac{\sqrt{3}}{2}=1$,故 B 正确;对于 C 选项,$\frac{\tan 15°}{1-\tan^2 15°}=\frac{1}{2}\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{6}$,故 C 错误;对于 D 选项,$\frac{2-\cos^2 20°}{3-\sin 50°}=\frac{2-\frac{1+\cos 40°}{2}}{3-\sin 50°}=\frac{\frac{3-\cos 40°}{2}}{3-\sin 50°}=\frac{\frac{3-\sin 50°}{2}}{3-\sin 50°}=\frac{1}{2}$,故 D 正确.故选 ABD.

10. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 【解析】因为 $2\sin 2\alpha=\cos 2\alpha+1$,所以 $4\sin\alpha\cos\alpha=2\cos^2\alpha$,又 $\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$,所以 $\cos\alpha<0$,$\sin\alpha<0$,则 $2\sin\alpha=\cos\alpha$,又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,所以 $\cos^2\alpha=\frac{4}{5}$,结合 $\cos\alpha<0$,知 $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

11. $-\frac{24}{7}$ 【解析】设等腰三角形的底角为 α,则 α 必为锐角,顶角为 $\pi-2\alpha$.由题意可知,$\sin\alpha=\frac{3}{5}$,∴$\cos\alpha=\frac{4}{5}$,∴$\tan\alpha=\frac{3}{4}$,则 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{9}{16}}=\frac{24}{7}$,故 $\tan(\pi-2\alpha)=-\tan 2\alpha=-\frac{24}{7}$.

12. $-\frac{2}{3}$　$-\frac{4\sqrt{5}}{9}$ 【解析】因为 $\sin\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{2}{3}$,所以 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right]=$

$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\sin\left[\pi-\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\right]=\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)=-\sin\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{2}{3}$. 因为 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\alpha-\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$，则 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，所以 $\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=2\times\frac{\sqrt{5}}{3}\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{4\sqrt{5}}{9}$.

13. **解：**方法一：因为 α 是第一象限角，且 $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=-\frac{3}{5}<0$，所以 $\frac{\pi}{4}+\alpha$ 为第二象限角，

所以 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=\frac{4}{5}$，

则 $\cos 2\alpha=\cos\left[2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\frac{\pi}{2}\right]=\sin 2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=-\frac{24}{25}$.

方法二：因为 α 是第一象限角，且 $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=-\frac{3}{5}<0$，所以 $\frac{\pi}{4}+\alpha$ 为第二象限角，

所以 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=\frac{4}{5}$，

所以 $\cos\alpha=\cos\left[\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\frac{\pi}{4}+\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{10}$，

则 $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2-1=-\frac{24}{25}$.

14. **解：**(1)由 $\sin\alpha=2-4\cos^2\frac{\alpha}{2}=2-4\times\frac{1+\cos\alpha}{2}$，得 $\sin\alpha=-2\cos\alpha$，则 $\tan\alpha=-2$，

故 $\cos 2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{1-\tan^2\alpha-2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1-4+4}{1+4}=\frac{1}{5}$.

(2) $\because\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore\tan\beta>0$.

由 $\tan^2\beta-2\tan\beta-3=0$，得 $(\tan\beta-3)(\tan\beta+1)=0$，解得 $\tan\beta=3$ 或 $\tan\beta=-1$（舍），

故 $\tan 2\beta=\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=\frac{6}{1-9}=-\frac{3}{4}$，

$\therefore\tan(\alpha+2\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan 2\beta}{1-\tan\alpha\tan 2\beta}=\frac{-2-\frac{3}{4}}{1-(-2)\times\left(-\frac{3}{4}\right)}=\frac{11}{2}$.

15. C 【解析】因为 $(1+\cos 2\alpha)(1+\sin\beta)=\sin 2\alpha\cos\beta$，所以 $2\cos^2\alpha(1+\sin\beta)=2\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta$，即 $\cos\alpha(1+\sin\beta)=\sin\alpha\cos\beta$，所以 $\cos\alpha=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha-\beta)$，所以 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin(\alpha-\beta)$，又 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$，$0<\frac{\pi}{2}-\alpha<\frac{\pi}{2}$，又 $y=\sin x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，所以 $\frac{\pi}{2}-\alpha=\alpha-\beta$，即 $2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$. 故选 C.

16. **证明：**因为 $\tan(\alpha-\beta)=\sin 2\beta$，$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$，

$\sin 2\beta=2\sin\beta\cos\beta=\frac{2\sin\beta\cos\beta}{\cos^2\beta+\sin^2\beta}=\frac{2\tan\beta}{1+\tan^2\beta}$，

所以 $\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2\tan\beta}{1+\tan^2\beta}$，

整理得 $\tan\alpha=\frac{3\tan\beta+\tan^3\beta}{1-\tan^2\beta}$，所以 $\tan\alpha+\tan\beta=\frac{3\tan\beta+\tan^3\beta+\tan\beta-\tan^3\beta}{1-\tan^2\beta}=\frac{2\times 2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=2\tan 2\beta$.

5.5.2 简单的三角恒等变换

第 1 课时 三角函数式的化简与求值

1. A 【解析】$\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2}\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{4}$，故选 A.

2. D 【解析】$\because\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$\therefore\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$. $\because\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，$\therefore\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

3. D 【解析】$\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$，故选 D.

4. B 【解析】由题意得 $f(x)=\frac{1}{2}\sin x\cos x=\frac{1}{4}\sin 2x$，因为 $\frac{\pi}{8}<x<\frac{5\pi}{12}$，所以 $\frac{\pi}{4}<2x<\frac{5\pi}{6}$，所以 $\frac{1}{2}<\sin 2x\leqslant 1$，所以 $\frac{1}{8}<\frac{1}{4}\sin 2x\leqslant\frac{1}{4}$，故该函数的值域为 $\left(\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right]$. 故选 B.

5. C 【解析】$y=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\tan\frac{x}{2}$，其最小正周期 $T=\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$.

6. D 【解析】由已知得 $2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left(-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}\times 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$，$\because 0<\frac{\alpha+\beta}{2}<\pi$，$\therefore\sin\frac{\alpha+\beta}{2}>0$，$\therefore\tan\frac{\alpha-\beta}{2}=\sqrt{3}$，又 $-\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha-\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$，$\therefore\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\pi}{3}$，$\therefore\alpha-\beta=\frac{2\pi}{3}$.

7. A 【解析】在 $\triangle ABC$ 中，由 $A+B+C=\pi$，得 $C=\pi-(A+B)$，则 $\cos^2\frac{C}{2}=\frac{1+\cos C}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos[\pi-(A+B)]=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(A+B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos A\cos B+\frac{1}{2}\sin A\sin B$，所以 $\sin A\sin B=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos A\cos B+\frac{1}{2}\sin A\sin B$，即 $\cos A\cos B+\sin A\sin B=1$，则 $\cos(A-B)=1$. 因为 $0<A<\pi$，$0<B<\pi$，所以 $-\pi<A-B<\pi$，所以 $A-B=0$，即 $A=B$，所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形. 无法判断 C 的大小，故选 A.

8. C 【解析】由 $\sqrt{3}\sin\alpha+2\cos\alpha=2$ 可得 $\sqrt{3}\sin\alpha=2-2\cos\alpha$，两边平方得 $3\sin^2\alpha=4-8\cos\alpha+4\cos^2\alpha$，可得 $3-3\cos^2\alpha=$

$4-8\cos\alpha+4\cos^2\alpha$，即 $1-8\cos\alpha+7\cos^2\alpha=0$，解得 $\cos\alpha=\frac{1}{7}$ 或 $\cos\alpha=1$(舍去). ∵$\alpha\in(0,\pi)$，∴$\frac{\alpha}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. ∵$\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$，∴$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，则 $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$，故 $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{21}}{7}}{\frac{2\sqrt{7}}{7}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 C.

9. BCD 【解析】$f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+3=\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)+3=3-\frac{1}{2}\cos 2x$. ∵$\omega=2$，∴$f(x)$的最小正周期为$\pi$，故 A 中结论正确；令 $2x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，可得 $x=\frac{1}{2}k\pi(k\in\mathbf{Z})$，∴$f(x)$的图象的对称轴方程为 $x=\frac{1}{2}k\pi(k\in\mathbf{Z})$，故 B 中结论错误；令 $2x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，可得 $x=\frac{1}{2}k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，∴$f(x)$的图象的对称中心为$\left(\frac{1}{2}k\pi+\frac{\pi}{4},3\right)(k\in\mathbf{Z})$，故 C 中结论错误；$f(x)_{\max}=3-\frac{1}{2}\times(-1)=\frac{7}{2}$，故 D 中结论错误. 故选 BCD.

10. 2 【解析】∵$\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2=\frac{1}{5}$，∴$1-\sin\alpha=\frac{1}{5}$，∴$\sin\alpha=\frac{4}{5}$. ∵$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，∴$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，∴$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=2$.

11. $\frac{1}{4}$ 【解析】∵$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{2}$，∴$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}(\cos\alpha+\cos\beta)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

12. ② 【解析】对于①，$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos x+\sin x\cos\frac{\pi}{4}\right)=\sin x+\cos x$，故①错误；对于②，$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x-\sin x\sin\frac{\pi}{4}\right)=\cos x-\sin x$，故②正确；对于③，$\frac{1-2\tan\frac{x}{2}-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}-\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\cos x-\sin x$，且 $x\neq\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，故③错误；对于④，$\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}-\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}=|\cos x|-|\sin x|$，故④错误. 故填②.

13. 解：(1)因为$\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以$\frac{\beta}{2}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，从而$\tan\frac{\beta}{2}>0$，又 $\cos\beta=-\frac{1}{3}$，所以 $\tan\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}}=\sqrt{2}$.

(2)因为$\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\cos\beta=-\frac{1}{3}$，

所以 $\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

又因为$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以$\alpha+\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$，

从而 $\cos(\alpha+\beta)=-\sqrt{1-\sin^2(\alpha+\beta)}=-\sqrt{1-\left(\frac{7}{9}\right)^2}=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$，所以 $\sin\alpha=\sin[(\alpha+\beta)-\beta]=\frac{7}{9}\times\left(-\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{1}{3}$.

14. 解：(1)因为 $\tan 60^\circ=\tan(20^\circ+40^\circ)=\frac{\tan 20^\circ+\tan 40^\circ}{1-\tan 20^\circ\tan 40^\circ}=\sqrt{3}$，所以 $\tan 20^\circ+\tan 40^\circ=\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan 20^\circ\tan 40^\circ$，

即 $\tan 20^\circ+\tan 40^\circ-\sqrt{3}=-\sqrt{3}\tan 20^\circ\tan 40^\circ$，

所以 $\frac{\tan 20^\circ+\tan 40^\circ+\tan 120^\circ}{\tan 20^\circ\tan 40^\circ}=\frac{\tan 20^\circ+\tan 40^\circ-\sqrt{3}}{\tan 20^\circ\tan 40^\circ}=\frac{-\sqrt{3}\tan 20^\circ\tan 40^\circ}{\tan 20^\circ\tan 40^\circ}=-\sqrt{3}$.

(2)$\sin 40^\circ(\tan 10^\circ-\tan 60^\circ)=\sin 40^\circ\times\left(\frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}-\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}\right)=\sin 40^\circ\times\frac{\sin 10^\circ\cos 60^\circ-\cos 10^\circ\sin 60^\circ}{\cos 10^\circ\cos 60^\circ}=\sin 40^\circ\times\frac{-\sin 50^\circ}{\cos 10^\circ\cos 60^\circ}=-\frac{\sin 40^\circ\cos 40^\circ}{\cos 10^\circ\cos 60^\circ}=-\frac{\frac{1}{2}\sin 80^\circ}{\cos 10^\circ\cos 60^\circ}=-\frac{\frac{1}{2}\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ\cos 60^\circ}=-1$.

15. AB 【解析】$f(x)=\sin x\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{4}=\sin x\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(1-\cos 2x)+\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)=\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$. 因为 $f(x)$的值域为$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right]$，所以$\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$，所以 $2x-\frac{\pi}{6}\in\left[2k\pi-\frac{7\pi}{6},2k\pi+\frac{\pi}{6}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$，故 $x\in\left[k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{6}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$，所以$(n-m)_{\max}=k\pi+\frac{\pi}{6}-\left(k\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$，$(n-m)_{\min}=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$，故选 AB.

16. 证明：$\frac{\sin\alpha+1}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}+1}{1+\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{\left(\tan\frac{\alpha}{2}+1\right)^2}{2\left(\tan\frac{\alpha}{2}+1\right)}=\frac{1}{2}\tan\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}$，得证.

第 2 课时　三角函数公式的应用

1. A 【解析】$\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$. 故选 A.

2. B 【解析】$\sin 15^\circ+\cos 15^\circ=\sqrt{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 15^\circ+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 15^\circ\right)=\sqrt{2}\sin(15^\circ+45^\circ)=\sqrt{2}\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{6}}{2}$. 故选 B.

3. B 【解析】由题意知$\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}=4,\\ \frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b=4,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2\sqrt{3},\\ b=2,\end{cases}$ ∴ $\frac{a}{b}=\sqrt{3}$,故选 B.

4. B 【解析】因为 $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$,所以 $f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$为非奇非偶函数,故 A 错误;$f\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-2\cos x$ 为偶函数,故 B 正确;$f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin x$ 为奇函数,故 C 错误;$f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$为非奇非偶函数,故 D 错误. 故选 B.

5. C 【解析】∵ $y=4\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)+3\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=5\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}+\varphi\right)$$\left(其中 \tan\varphi=\frac{3}{4}\right)$,∴该函数的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{3}$. 故选 C.

6. C 【解析】由题意可知,$a=\sin 24^\circ$,$b=\sin 26^\circ$,$c=\sin 25^\circ$,而当 $0^\circ<x<90^\circ$时,$y=\sin x$ 单调递增,∴$a<c<b$,故选 C.

7. B 【解析】$\sqrt{3}\tan 10^\circ+4\sin 10^\circ=\frac{\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}+4\sin 10^\circ=\frac{\sqrt{3}\sin 10^\circ+4\sin 10^\circ\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ}=\frac{\sqrt{3}\sin 10^\circ+2\sin 20^\circ}{\cos 10^\circ}=\frac{\sqrt{3}\sin(30^\circ-20^\circ)+2\sin 20^\circ}{\cos 10^\circ}=\frac{\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\cos 20^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20^\circ\right)+2\sin 20^\circ}{\cos 10^\circ}=\frac{\frac{1}{2}\sin 20^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^\circ}{\cos 10^\circ}=\frac{\sin(20^\circ+60^\circ)}{\cos 10^\circ}=\frac{\sin 80^\circ}{\cos 10^\circ}=\frac{\sin(90^\circ-10^\circ)}{\cos 10^\circ}=\frac{\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ}=1$. 故选 B.

8. A 【解析】在正方形 $ABCD$ 中,$AD=1$,$\angle DAE=\theta$,所以 $DH=AD\sin\angle DAE=\sin\theta$,$AH=AD\cos\angle DAE=\cos\theta$,又因为 $\mathrm{Rt}\triangle ADH\cong\mathrm{Rt}\triangle BAE\cong\mathrm{Rt}\triangle CBF\cong\mathrm{Rt}\triangle DCG$,所以 $GH=DH-AH=\sin\theta-\cos\theta$,所以小正方形 $EFGH$ 的面积 $S=GH^2=(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1-\sin 2\theta$. 故选 A.

9. AC 【解析】$f(x)=\sin x\cos x+\sin^2 x=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x\right)+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}$. $f(x)=\sin x\cos x+\sin^2 x=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x\right)+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}$. 故选 AC.

10. π 【解析】$y=2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1=\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin 2x$,其最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

11. -1 【解析】因为 $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以 $\cos x+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)=\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-1$.

12. R^2 【解析】设长方形的面积为 S,$\angle AOB=\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$,则 $AB=R\sin\alpha$,$OB=R\cos\alpha$,$S=(R\sin\alpha)\cdot(2R\cos\alpha)=2R^2\sin\alpha\cos\alpha=R^2\sin 2\alpha$. 当 $\sin 2\alpha$ 取得最大值,即 $\sin 2\alpha=1$ 时,长方形的面积最大,此时 $\alpha=\frac{\pi}{4}$,长方形面积的最大值为 R^2.

13. 解:(1)由题意知 $f(x)=\frac{1-\cos 2x}{2}-\frac{1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right)-\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x-\frac{1}{4}\cos 2x=\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$,

所以 $f(x)$的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)当 $x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$时,$2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$,令 $2x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}$,得 $x=-\frac{\pi}{6}$,所以 $f(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\right]$上单调递减,在区间$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$上单调递增. 又 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{4}$,$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$,$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}$,所以 $f(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$上的最大值为$\frac{\sqrt{3}}{4}$,最小值为$-\frac{1}{2}$,所以 $f(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$上的取值范围是$\left[-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{4}\right]$.

14. 解:(1)由题意知 $f(x)=\cos x\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{4}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}\sin 2x+$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,解得 $k\pi-\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{12}$,$k\in\mathbf{Z}$,所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{5}{12}\pi+k\pi,\frac{\pi}{12}+k\pi\right]$,$k\in\mathbf{Z}$.

(2)由(1)可得 $g(x)=\sin x-\cos x+\sin 2x$,

令 $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$,则 $t^2=1-\sin 2x$,所以 $\sin 2x=1-t^2$.

由 $g(x)\geqslant 1$,得 $-t^2+t+1\geqslant 1$,解得 $0\leqslant t\leqslant 1$,

故 $0\leqslant\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$,所以 $\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$,所以所求 x 的取值范围为 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$.

15. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　$-\frac{\sqrt{3}}{3}$　**[解析]** 由已知得 $y\cos x+2y-\sin x=0$,则 $\sqrt{1+y^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\sin x-\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\cos x\right)=2y$ ①. 令 $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$, $\sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$, 则①式可化为 $\sqrt{1+y^2}\sin(x-\varphi)=2y$,即 $\sin(x-\varphi)=\frac{2y}{\sqrt{1+y^2}}\in[-1,1]$,则 $0\leqslant\frac{4y^2}{1+y^2}\leqslant 1$,解得 $y\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$,故 $y_{\max}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $y_{\min}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

16. **解:**(1)在 $Rt\triangle DCO$ 中,$OD=10$,$\therefore DC=10\sin\theta$,$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$. 又在 $Rt\triangle ABO$ 中,$\angle AOB=\frac{\pi}{6}$,$AB=DC=10\sin\theta$,

$\therefore OB=\sqrt{3}AB=10\sqrt{3}\sin\theta$,$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$.

(2)在 $Rt\triangle DOC$ 中,$OC=10\cos\theta$,$\therefore BC=OC-OB=10(\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta)$,$\therefore S=AB\cdot BC=100\sin\theta(\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta)=100\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta-\sqrt{3}\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)=100\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)-50\sqrt{3}$. $\because 0<\theta<\frac{\pi}{6}$,$\therefore\frac{\pi}{3}<2\theta+\frac{\pi}{3}<\frac{2\pi}{3}$,

$\therefore$ 当 $2\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$,即 $\theta=\frac{\pi}{12}$ 时,$S_{\max}=100-50\sqrt{3}$.

滚动习题（十）

1. C　**[解析]** $\because\sin(\pi-\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{4}=\sin\alpha$,$\therefore\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\times\frac{2}{16}=\frac{3}{4}$,故选 C.

2. B　**[解析]** $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,$\therefore T=\frac{2\pi}{2}=\pi$. 故选 B.

3. D　**[解析]** $\because 270°<\alpha<360°$,$\therefore 135°<\frac{\alpha}{2}<180°$,$\therefore\cos\frac{\alpha}{2}<0$,故 $\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=-\sqrt{\frac{1+\frac{2}{3}}{2}}=-\sqrt{\frac{5}{6}}=-\frac{\sqrt{30}}{6}$,故选 D.

4. A　**[解析]** $a=\frac{1}{2}\cos 7°+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7°=\sin 30°\cos 7°+\cos 30°\sin 7°=\sin(30°+7°)=\sin 37°$, $b=\frac{2\tan 19°}{1-\tan^2 19°}=\tan 38°=\frac{\sin 38°}{\cos 38°}>\frac{\sin 38°}{1}=\sin 38°$, $c=\sqrt{\frac{1-\cos 72°}{2}}=\sqrt{\frac{1-(1-2\sin^2 36°)}{2}}=\sin 36°$. 因为当 $0°<x<90°$ 时,$y=\sin x$ 单调递增,所以 $\sin 38°>\sin 37°>\sin 36°$,所以 $b>a>c$. 故选 A.

5. A　**[解析]** 因为 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$,$\sin\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$,$\cos(\beta-\alpha)=\frac{\sqrt{5}}{5}$,所以 $\cos\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$,$0<\beta-\alpha<\frac{\pi}{2}$,所以 $\sin(\beta-\alpha)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,所以 $\cos\beta=\cos[\alpha+(\beta-\alpha)]=\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{5}}{5}-\frac{\sqrt{10}}{10}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{2}}{10}$,故选 A.

6. A　**[解析]** 由题可得 $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)+\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha+\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{5}$,所以 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left[2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{2}\right]=-\cos 2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-1=2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2-1=-\frac{7}{25}$. 故选 A.

7. BD　**[解析]** 对于选项 A,$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$,由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,得 $k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{6}$,$k\in\mathbf{Z}$,当 $k=0$ 时,$-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}$,所以 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增,在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递减,故 A 不正确. 对于选项 B,$T=\pi$,因为 $y=|\sin x|$ 在 $\left[k\pi,k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$,$k\in\mathbf{Z}$ 上单调递增,所以由 $k\pi\leqslant x+\frac{\pi}{4}\leqslant k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,得 $k\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{4}$,$k\in\mathbf{Z}$,所以 $y=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增,故 B 正确. 对于选项 C,$T=\pi$,$y=\cos|2x|=\cos 2x$,由 $2k\pi\leqslant 2x\leqslant 2k\pi+\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,得 $k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,所以 $y=\cos|2x|$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减,所以 $y=\cos|2x|$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递减,故 C 不正确. 对于选项 D,$T=\pi$,当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 时,$y=|\tan x|=\tan x$ 单调递增,故 D 正确. 故选 BD.

8. CD 【解析】$\sin 21^\circ\cos 81^\circ-\sin 69^\circ\cos 9^\circ=\sin 21^\circ\cos 81^\circ-\cos 21^\circ\sin 81^\circ=\sin(21^\circ-81^\circ)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故选项 A 中等式不成立；$\cos^2 75^\circ-\cos^2 15^\circ=\dfrac{1+\cos 150^\circ}{2}-\dfrac{1+\cos 30^\circ}{2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故选项 B 中等式不成立；因为 $\cos 10^\circ=\cos(30^\circ-20^\circ)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^\circ+\dfrac{1}{2}\sin 20^\circ$，所以 $\dfrac{2\cos 10^\circ-\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}=\dfrac{(\sqrt{3}\cos 20^\circ+\sin 20^\circ)-\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}=\sqrt{3}$，故选项 C 中等式成立；因为 $1+\sqrt{3}\tan 10^\circ=1+\dfrac{\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}=\dfrac{\cos 10^\circ+\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}=\dfrac{2\sin(30^\circ+10^\circ)}{\cos 10^\circ}=\dfrac{2\sin 40^\circ}{\cos 10^\circ}$，所以 $\sin 50^\circ(1+\sqrt{3}\tan 10^\circ)=\sin 50^\circ\times\dfrac{2\sin 40^\circ}{\cos 10^\circ}=\dfrac{2\sin 40^\circ\cos 40^\circ}{\sin 80^\circ}=1$，故选项 D 中等式成立. 故选 CD.

9. $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ 【解析】$\dfrac{1}{2}-\cos^2\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1+\cos\dfrac{\pi}{4}}{2}=-\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

10. $f(x)=|\sin \pi x|$（答案不唯一） 【解析】最小正周期为 1，且值域是 $[0,1]$ 的函数可以为 $f(x)=|\sin \pi x|$.

11. $\dfrac{5}{7}$ 【解析】因为 $\tan\alpha,\tan\beta$ 是方程 $x^2-5x+6=0$ 的两根，所以 $\tan\alpha+\tan\beta=5$，$\tan\alpha\tan\beta=6$，故 $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{5}{7}$.

12. $m\geqslant\dfrac{3}{2}$ 【解析】$f(x)=3\sin\dfrac{x}{4}\cos\dfrac{x}{4}+\sqrt{3}\sin^2\dfrac{x}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+m=\dfrac{3}{2}\sin\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\cos\dfrac{x}{2}\right)-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+m=\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)+m$，$\because -\dfrac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{2\pi}{3}$，$\therefore -\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{6}\leqslant\dfrac{\pi}{6}$，$\therefore f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right]$ 上的最小值为 $f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{3}{2}+m$，由 $-\dfrac{3}{2}+m\geqslant 0$，得 $m\geqslant\dfrac{3}{2}$.

13. 解：(1)由 $\dfrac{7\pi}{6}<\alpha<\dfrac{5\pi}{3}$，得 $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha+\dfrac{\pi}{3}<2\pi$，又 $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3}{5}$，所以 $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{4}{5}$，

所以 $\sin\alpha=\sin\left[\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)-\dfrac{\pi}{3}\right]=\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\dfrac{\pi}{3}-\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{5}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{4+3\sqrt{3}}{10}$.

(2)由题意得 $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}+2\alpha\right)=\cos\left[\pi-2\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)\right]=-\cos 2\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)=1-2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)=1-2\times\left(\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)^2=\dfrac{1}{5}$.

14. 解：(1)$\dfrac{2\cos 20^\circ-\sin 10^\circ}{\cos 40^\circ\cdot\sqrt{1-\sin 10^\circ}}=\dfrac{2\cos(30^\circ-10^\circ)-\sin 10^\circ}{\cos 40^\circ\cdot\sqrt{1-\cos 80^\circ}}=\dfrac{\sqrt{3}\cos 10^\circ+\sin 10^\circ-\sin 10^\circ}{\cos 40^\circ\cdot\sqrt{2}\sin 40^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}\cos 10^\circ}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 80^\circ}=\sqrt{6}$.

(2)$\because \dfrac{\pi}{2}<\beta<\alpha<\dfrac{3\pi}{4}$，$\therefore 0<\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{4}$，$\pi<\alpha+\beta<\dfrac{3\pi}{2}$.

$\because \cos(\alpha-\beta)=\dfrac{12}{13}$，$\sin(\alpha+\beta)=-\dfrac{3}{5}$，$\therefore \sin(\alpha-\beta)=\sqrt{1-\left(\dfrac{12}{13}\right)^2}=\dfrac{5}{13}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\sqrt{1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2}=-\dfrac{4}{5}$，

则 $\cos 2\alpha=\cos[(\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)]=\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{12}{13}\times\left(-\dfrac{4}{5}\right)-\left(-\dfrac{3}{5}\right)\times\dfrac{5}{13}=-\dfrac{33}{65}$.

15. 解：$\because$ 函数 $f(x)$ 的图象的相邻两条对称轴间的距离为 π，

$\therefore f(x)$ 的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi$，

$\therefore \omega=1$，$\therefore f(x)=2\sin(x+\varphi)$.

选条件①.

(1)$\because y=f\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(x+\varphi-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 为奇函数，

$\therefore f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\varphi-\dfrac{\pi}{3}\right)=0$，解得 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

$\because 0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore \varphi=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore f(x)=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

(2)由 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x+\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $-\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，令 $k=0$，得 $-\dfrac{5\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}$，令 $k=1$，得 $\dfrac{7\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{13\pi}{6}$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的单调递增区间为 $\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right]$，$\left[\dfrac{7\pi}{6},2\pi\right]$.

选条件②.

(1)$\because f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\varphi\right)=\sqrt{3}$，$\therefore \sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\varphi\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $\varphi=2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 或 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$. $\because 0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore \varphi=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore f(x)=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

(2)由 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x+\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $-\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，令 $k=0$，得 $-\dfrac{5\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}$，令 $k=1$，得 $\dfrac{7\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{13\pi}{6}$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的单调递增区间为 $\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right]$，$\left[\dfrac{7\pi}{6},2\pi\right]$.

选条件③.

(1)$\because \dfrac{2\pi}{3}$ 是函数 $f(x)$ 的一个零点，$\therefore f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=2\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}+\varphi\right)=0$，解得 $\varphi=k\pi-\dfrac{2\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$.

$\because 0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore \varphi=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore f(x)=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

(2)由 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x+\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $-\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，令 $k=0$，得 $-\dfrac{5\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}$，令 $k=$

1,得 $\frac{7\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{13\pi}{6}$,∴函数 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的单调递增区间为 $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$,$\left[\frac{7\pi}{6},2\pi\right]$.

5.6 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$

5.6.1 匀速圆周运动的数学模型

5.6.2 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象

第1课时 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象

1. D **[解析]** 将函数 $y=2\sin x,x\in\mathbf{R}$ 图象上的所有点向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度,可得函数 $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right),x\in\mathbf{R}$ 的图象,故选D.

2. B **[解析]** 将函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{5}\right)$ 的图象上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$(纵坐标不变),即可得到函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)$ 的图象.故选B.

3. A **[解析]** 将函数 $f(x)=\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后,得到 $g(x)=\sin 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2x$ 的图象.故选A.

4. C **[解析]** 因为 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{4\pi}{3}\right)$,所以 $f(0)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,排除B,D;由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{4\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,得 $k\pi-\frac{11\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi-\frac{5\pi}{12},k\in\mathbf{Z}$,由 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{4\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,得 $k\pi-\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{12},k\in\mathbf{Z}$,所以函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right]$ 上单调递增,在 $\left[0,\frac{\pi}{12}\right]$ 上单调递减,排除A.故选C.

5. B **[解析]** 依题意,曲线 $C_2:y=\cos\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left[\left(\frac{1}{2}x+\frac{5\pi}{12}\right)-\frac{\pi}{2}\right]=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{5\pi}{12}\right)$.故选B.

6. A **[解析]** 因为函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$ 的最小正周期为 π,所以 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$,所以 $\omega=2$,即 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$,则 $g(x)=\cos 2x=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)+\frac{\pi}{4}\right]$,所以将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度即可得到函数 $g(x)$ 的图象.故选A.

7. ABC **[解析]** 令 $2x-\frac{\pi}{4}=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi$,得 $x=\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8},\frac{5\pi}{8},\frac{7\pi}{8},\frac{9\pi}{8}$,故所取点的坐标是 $\left(\frac{\pi}{8},0\right)$,$\left(\frac{3\pi}{8},2\right)$,$\left(\frac{5\pi}{8},0\right)$,$\left(\frac{7\pi}{8},-2\right)$,$\left(\frac{9\pi}{8},0\right)$.故选ABC.

8. AD **[解析]** 对于A,把曲线 $C_1:y=\cos x$ 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,得到曲线 $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$,再把得到的曲线上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$,纵坐标不变,得到曲线 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$,故A正确;对于B,把曲线 $C_1:y=\cos x$ 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度,得到曲线 $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$,再把得到的曲线上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$,纵坐标不变,得到曲线 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}-\frac{7\pi}{12}\right)$,故B错误;对于C,把曲线 $C_1:y=\cos x$ 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$,纵坐标不变,得到曲线 $y=\cos 2x$,再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,得到曲线 $y=\cos\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)$,故C错误;对于D,把曲线 $C_1:y=\cos x$ 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$,纵坐标不变,得到曲线 $y=\cos 2x$,再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度,得到曲线 $y=\cos\left[2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right]=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$,故D正确.故选AD.

9. AC **[解析]** 能得到 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象的变换方式有两种:第一种,先平移后伸缩,即将 $y=\sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度,再将各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$(纵坐标不变);第二种,先伸缩后平移,即将 $y=\sin x$ 的图象上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$(纵坐标不变),再向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度.故选AC.

10. $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$(答案不唯一) **[解析]** 当 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 时,$2x+\frac{\pi}{3}\in[0,2\pi]$,列表如下:

$2x+\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$
y	0	2	0	-2	0

由列表可得,应取的五个点为 $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$,$\left(\frac{\pi}{12},2\right)$,$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$,$\left(\frac{7\pi}{12},-2\right)$,$\left(\frac{5\pi}{6},0\right)$.

11. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **[解析]** 由题意可得,把函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象

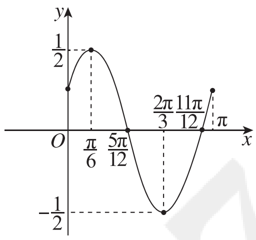
向左平移$\frac{\pi}{2}$个单位长度，再把所得图象上各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$，纵坐标不变，得到函数 $f(x)$的图象，所以 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，故 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

12. $\frac{\pi}{6}$ **[解析]** 由题意知，$g(x)=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\varphi\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}+\varphi\right)$，因为对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $g(-x)=g(x)$，所以 $g(x)$为偶函数，所以$\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，即 $\varphi=\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，又 $\varphi\in[0,\pi)$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

13. 解：(1)由题意可得表格如下：

$2x+\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{13\pi}{6}$
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{12}$	π
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$

描点、连线，可得图象如图所示.

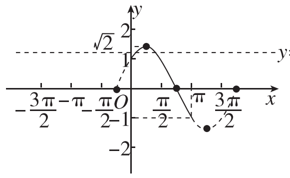


(2)将 $f(x)$的图象向上平移 1 个单位长度，得到 $y=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$ 的图象，再将得到的图象上所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$（纵坐标不变），得到 $y=\frac{1}{2}\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)+1$ 的图象，再将得到的图象向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度，可得 $y=\frac{1}{2}\sin\left(4x-\pi+\frac{\pi}{6}\right)+1=\frac{1}{2}\sin\left(4x-\frac{5\pi}{6}\right)+1$ 的图象，$\therefore g(x)=\frac{1}{2}\sin\left(4x-\frac{5\pi}{6}\right)+1$.

14. 解：关于 x 的方程$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=k$ 在$[0,\pi]$上有两个实数根，即函数 $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$在$[0,\pi]$上的图象与直线 $y=k$ 有两个交点，用“五点法”作出函数 $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$在一个周期内的图象，列表如下：

$x+\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
x	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$
$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$	0	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	0

描点、连线，得到函数 $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)(0\leqslant x\leqslant\pi)$的图象，如图中实线部分所示.



又当 $x=0$ 时，$y=\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}=1$，当 $x=\pi$ 时，$y=\sqrt{2}\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-1$，$\therefore$由图可知 $1\leqslant k<\sqrt{2}$，$\therefore$实数 k 的取值范围是 $1\leqslant k<\sqrt{2}$.

15. A **[解析]** 函数 $f(x)=\cos 2x-\sin 2x=\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，将函数 $f(x)$的图象向左平移 $a(a>0)$个单位长度后所得图象对应的函数解析式为 $g(x)=\sqrt{2}\cos\left(2x+2a+\frac{\pi}{4}\right)$，因为 $g(x)$为奇函数，所以 $2a+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得 $a=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$，又 $a>0$，所以 $k\in\mathbf{N}$. 将函数 $f(x)$的图象向右平移 $b(b>0)$个单位长度后所得图象对应的函数解析式为 $h(x)=\sqrt{2}\cos\left(2x-2b+\frac{\pi}{4}\right)$，因为 $h(x)$为偶函数，所以$-2b+\frac{\pi}{4}=n\pi(n\in\mathbf{Z})$，解得 $b=-\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{8}(n\in\mathbf{Z})$，又 $b>0$，所以 $b=\frac{m\pi}{2}+\frac{\pi}{8}(m\in\mathbf{N})$，所以$|a-b|$的最小值为 0，故选 A.

16. 解：(1) $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x-\cos^2\omega x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x-\frac{1}{2}(\cos 2\omega x+1)=\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}$.

由 $f(x)$的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2\omega}=\frac{\pi}{2}$，解得 $\omega=2$，所以 $f(x)=\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}$.

(2)将 $f(x)$图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变)，可得 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}$的图象，再将所得图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，可得 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}$的图象，最后将所得图象向上平移$\frac{3}{2}$个单位长度，得到函数 $g(x)$的图象，则 $g(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$.

当 $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$时，因为$|g(x)-m|<2$ 恒成立，所以 $g(x)-2<m<g(x)+2$ 恒成立，所以$[g(x)-2]_{\max}<m<[g(x)+2]_{\min}$. 当 $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$时，$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$，$g(x)$单调递减，所以 $g(x)_{\max}=g\left(\frac{\pi}{6}\right)=1+1=2$，$g(x)_{\min}=g\left(\frac{2\pi}{3}\right)=1-1=0$，从而$[g(x)-2]_{\max}=0$，$[g(x)+2]_{\min}=2$，

即 $0<m<2$，所以 m 的取值范围是$(0,2)$.

第 2 课时　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象与性质的应用

1. B 【解析】根据函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 在一个周期内的图象,可得 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}$,得 $\omega=2$. 再根据五点法,可得 $2\times\dfrac{\pi}{3}+\varphi=\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,又 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$,$\therefore\varphi=\dfrac{\pi}{3}$,故选 B.

2. A 【解析】令 $2x=k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,解得 $x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$,故函数 $y=\sin 2x$ 图象的对称轴方程为 $x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$,所以平移后图象的对称轴方程为 $x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}$,$k\in\mathbf{Z}$,故选 A.

3. C 【解析】由题图可知 $\dfrac{T}{2}=\dfrac{11\pi}{12}-\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{\pi}{2}$,所以 $\dfrac{T}{4}=\dfrac{\pi}{4}$,因为 $\dfrac{5\pi}{12}-\dfrac{T}{4}=\dfrac{5\pi}{12}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{6}$,所以由图可知 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=2$. 故选 C.

4. A 【解析】由题图可知 $f(0)=m$,$f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=-m$,所以 $\left(\dfrac{\pi}{3},0\right)$ 是 $f(x)$ 图象的一个对称中心,由图象可得函数 $f(x)$ 的最小正周期 T 满足 $\dfrac{1}{2}T=\dfrac{\pi}{3}-\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\pi}{2}$,则 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\pi$,所以 $\omega=2$,又由图象可得 $2\times\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+\varphi=k\pi,k\in\mathbf{Z}$,所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,又 $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$. 故选 A.

5. D 【解析】由题意,得 $g(x)=\sin\left[2(x+\varphi)-\dfrac{\pi}{3}\right]=\sin\left(2x+2\varphi-\dfrac{\pi}{3}\right)$. $\because g(x)$ 是偶函数,$\therefore 2\varphi-\dfrac{\pi}{3}=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$,$\therefore\varphi=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{5\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$. 当 $k=0$ 时,$\varphi=\dfrac{5\pi}{12}$;当 $k=1$ 时,$\varphi=\dfrac{11\pi}{12}$,故选 D.

6. A 【解析】由题意知,水轮的半径为 3 m,水轮圆心 O 距离水面 2 m,所以 $A=3$. 因为水轮每分钟转 2 圈,所以转一圈需要 30 s,所以 $T=30=\dfrac{2\pi}{\omega}$,解得 $\omega=\dfrac{\pi}{15}$. 故选 A.

7. AC 【解析】由最小值为 -2,$A>0$,可得 $A=2$,由 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{5\pi}{12}$ 处取得最小值,且与此最小值点相邻的一个零点为 $\dfrac{\pi}{6}$,得函数 $f(x)$ 的最小正周期 T 满足 $\dfrac{T}{4}=\dfrac{5\pi}{12}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{4}$,即 $T=\pi$,又 $\omega>0$,所以 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=2$,则有 $2\times\dfrac{5\pi}{12}+\varphi=\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,解得 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,又 $0<\varphi<\pi$,所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$,即 $f(x)=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$,故 A 正确,B 错误;$f\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=2\cos\left[2\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{\pi}{6}\right]=2\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)=2\sin 2x$,又 $2\sin(-2x)=-2\sin 2x$,所以 $y=f\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 为奇函数,故 C 正确;若 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right)$,则 $2x+\dfrac{\pi}{6}\in\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right)$,又 $\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right)$ 不是 $y=\cos x$ 的单调递减区间,所以 $\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right)$ 不是 $f(x)$ 的单调递减区间,故 D 错误. 故选 AC.

8. BC 【解析】对于 A,根据周期公式可得 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$,故 A 不正确;对于 B,$f(x)=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=3\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}\right)=3\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$,故 B 正确;对于 C,$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=3\sin\left(2\times\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{6}\right)=3\sin\dfrac{\pi}{2}=3$,故 C 正确;对于 D,$f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=3\sin\left(-2\times\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{6}\right)=3\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{3}{2}$,故 D 不正确. 故选 BC.

9. BC 【解析】由题意可得 $A=2$,$T=2\times\left[\dfrac{\pi}{3}-\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]=\pi$,则 $\omega=\dfrac{2\pi}{\pi}=2$,则有 $2\times\dfrac{\pi}{3}+\varphi=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,即 $\varphi=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,又 $-\pi<\varphi<0$,所以 $\varphi=-\dfrac{\pi}{6}$,即 $f(x)=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$. 对于 A,$T=\pi$,故 A 错误;对于 B,令 $2x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,解得 $x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,故 B 正确;对于 C,把函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位长度,得到 $g(x)=2\sin\left(2x+2\times\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{\pi}{6}\right)=2\sin 2x$ 的图象,故 C 正确;对于 D,当 $x\in[0,a]$ 时,$2x-\dfrac{\pi}{6}\in\left[-\dfrac{\pi}{6},2a-\dfrac{\pi}{6}\right]$,则有 $2\pi\leqslant 2a-\dfrac{\pi}{6}<3\pi$,即 $\dfrac{13\pi}{12}\leqslant a<\dfrac{19\pi}{12}$,故 D 错误. 故选 BC.

10. 单调递减 【解析】将函数 $f(x)=\sin(-2x)=-\sin 2x$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度后,得到函数 $g(x)=-\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象,当 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{6}\right)$ 时,$2x-\dfrac{\pi}{3}\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$,函数 $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 单调递增,则函数 $g(x)$ 单调递减,故 $g(x)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{6}\right)$ 上单调递减.

11. $f(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 【解析】根据图象可知,$A=2$. 由 $\dfrac{3}{4}T=\dfrac{11}{12}\pi-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3}{4}\pi$,可得 $T=\pi$,所以 $\omega=\dfrac{2\pi}{\pi}=2$. 由 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=2$ 得,$2\times\dfrac{\pi}{6}+\varphi=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,因为 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$,故函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

12. $\left(\dfrac{3}{2},3\right]$ 【解析】$f(x)+\sqrt{2}=0$,即 $2\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}=0$,即 $\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,即 $\omega x+\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 或 $\omega x+\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$. 当 $k=0$ 时,$-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi=-\dfrac{\pi}{4}$,$-\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi=-\dfrac{3\pi}{4}$;当 $k=1$ 时,$-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi=\dfrac{7\pi}{4}$,$-\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi=\dfrac{5\pi}{4}$;当 $k=2$ 时,$-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi=\dfrac{15\pi}{4}$,$-\dfrac{3\pi}{4}+$

$2k\pi=\frac{13\pi}{4}$. 当 $0<x<\pi$ 时,$\frac{\pi}{4}<\omega x+\frac{\pi}{4}<\pi\omega+\frac{\pi}{4}$,又由在区间$(0,\pi)$上有两个不同的 x 使得 $f(x)+\sqrt{2}=0$ 成立,得 $\frac{7\pi}{4}<\pi\omega+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{13\pi}{4}$,解得 $\frac{3}{2}<\omega\leqslant 3$,故 ω 的取值范围是 $\left(\frac{3}{2},3\right]$.

13. 解:(1)因为 $f(x)=3\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)-2=3\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-2$,所以函数 $f(x)$的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

令 $2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得 $\frac{\pi}{6}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,故函数 $f(x)$的单调递减区间为$\left[\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{2\pi}{3}+k\pi\right]$,$k\in\mathbf{Z}$. 令 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得 $x=\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,

故函数 $f(x)$图象的对称中心为$\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},-2\right),k\in\mathbf{Z}$.

(2)$h(x)=af(x)+b=3a\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-2a+b$,

由 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$,得 $2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$.

则$-\frac{1}{2}\leqslant\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 1$.

当 $a>0$ 时,可得$\begin{cases}3a-2a+b=6,\\-\frac{3a}{2}-2a+b=-3,\\a>0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\b=4;\end{cases}$

当 $a<0$ 时,可得$\begin{cases}3a-2a+b=-3,\\-\frac{3a}{2}-2a+b=6,\\a<0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-2,\\b=-1.\end{cases}$

又 $a=0$ 明显不符合题意,所以$\begin{cases}a=2,\\b=4\end{cases}$或$\begin{cases}a=-2,\\b=-1.\end{cases}$

14. 解:(1)$\because g(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\sin^2 x=\sqrt{3}\sin 2x-(1-\cos 2x)=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x-1=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-1$,

$\therefore f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}+2\varphi\right)-1$. $\because f(x)\leqslant f(0)$恒成立,

$\therefore f(0)$是函数 $f(x)$的最大值,故$\frac{\pi}{6}+2\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

得 $\varphi=\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,$\because 0<\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$,$\therefore\varphi=\frac{\pi}{6}$.

(2)$\because x\in\left(\pi,\frac{7\pi}{6}\right)$,$\therefore 2x+\frac{\pi}{6}+2\varphi\in\left(2\pi+\frac{\pi}{6}+2\varphi,2\pi+\frac{\pi}{2}+2\varphi\right)$. 令 $t=2x+\frac{\pi}{6}+2\varphi$,则 $f(x)$在$\left(\pi,\frac{7\pi}{6}\right)$上是单调函数可转化成 $h(t)=2\sin t-1$ 在$\left(2\pi+\frac{\pi}{6}+2\varphi,2\pi+\frac{\pi}{2}+2\varphi\right)$上是单调函数,$\because h(t)=2\sin t-1$ 的最小正周期为 2π,

$\therefore h(t)=2\sin t-1$ 在$\left(\frac{\pi}{6}+2\varphi,\frac{\pi}{2}+2\varphi\right)$上是单调函数.

$\because 0<\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$,$\therefore\frac{\pi}{6}+2\varphi\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$,$\frac{\pi}{2}+2\varphi\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$,

$\because h(t)=2\sin t-1$ 在$\left(\frac{\pi}{6}+2\varphi,\frac{\pi}{2}+2\varphi\right)$上是单调函数,

$\therefore\begin{cases}\frac{\pi}{6}+2\varphi\geqslant\frac{\pi}{2},\\0<\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\end{cases}$解得$\frac{\pi}{6}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$,$\therefore\varphi$ 的取值范围为$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$.

15. C 【解析】设 $f(x)=x\sin x,x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,$\forall x_1,x_2$,且 $0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$,因为 $y=x$ 和 $y=\sin x$ 均在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增,所以 $0<\sin x_1<\sin x_2<1$,$0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$,故 $f(x_1)=x_1\sin x_1<x_2\sin x_1<x_2\sin x_2=f(x_2)$,故 $f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增,又易知 $f(x)$为偶函数,所以 $f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$上单调递减,由 $x\sin x=x^2+2y\sin 2y$,得 $x\sin x-2y\sin 2y=x^2\geqslant 0$,即 $f(x)-f(2y)\geqslant 0$,即 $f(x)\geqslant f(2y)$,故$|x|\geqslant 2|y|$. 故选 C.

16. $\frac{5\pi}{12}$ 【解析】将函数 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度后得到 $y=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos 2x$ 的图象,所以 $g(x)=2\cos 2x$. 若实数 x_1,x_2 满足 $f(x_1)-g(x_2)=4$,则 x_1 是函数 $f(x)$的最大值点,x_2 是 $g(x)$的最小值点,则 $f(x_1)=2,g(x_2)=-2$,所以 $2x_1+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$,$2x_2=2n\pi+\pi$,$k,n\in\mathbf{Z}$,即 $x_1=k\pi+\frac{\pi}{12}$,$x_2=n\pi+\frac{\pi}{2}$,$k,n\in\mathbf{Z}$,所以$|x_1-x_2|_{\min}=\left|k\pi-n\pi-\frac{5\pi}{12}\right|_{\min}=\left|(k-n)\pi-\frac{5\pi}{12}\right|_{\min}=\frac{5\pi}{12}$,$k,n\in\mathbf{Z}$,所以$|x_1-x_2|$的最小值为$\frac{5\pi}{12}$.

17. 解:(1)H 关于 t 的函数关系式为 $H=A\sin(\omega t+\varphi)+B$,由题可知$\begin{cases}B+A=145,\\B-A=21,\end{cases}$解得$\begin{cases}A=62,\\B=83,\end{cases}$又函数周期为 30,所以 $\omega=\frac{2\pi}{30}=\frac{\pi}{15}$,可得 $H=62\sin\left(\frac{\pi}{15}t+\varphi\right)+83$. 又当 $t=0$ 时,$H=62\sin\left(\frac{\pi}{15}\times 0+\varphi\right)+83=21$,所以 $\sin\varphi=-1$,又$|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=-\frac{\pi}{2}$,所以 H 关于 t 的函数关系式为 $H=62\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}\right)+83$.

(2)$H=62\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}\right)+83=-62\cos\frac{\pi}{15}t+83$,由 $-62\cos\frac{\pi}{15}t+83=52$,得 $\cos\frac{\pi}{15}t=\frac{1}{2}$,由$\frac{\pi}{15}t=\frac{\pi}{3}$,得 $t=5$,所以游客甲坐上摩天轮后 5 分钟,距离地面的高度第一次恰好达到 52 米.

(3)由题意知,经过 t 分钟后游客甲距离地面的高度 $H_{甲}=-62\cos\frac{\pi}{15}t+83$,$0\leqslant t\leqslant 30$. 乙与甲间隔的时间为$\frac{30}{36}\times 6=5$(分钟),所以乙距离地面的高度 $H_{乙}=-62\cos\frac{\pi}{15}(t-5)+83$,$5\leqslant t\leqslant 30$,所以两人离地面的高度差 $h=|H_{甲}-H_{乙}|=\left|-62\cos\frac{\pi}{15}t+62\cos\frac{\pi}{15}(t-5)\right|=62\left|\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{6}\right)\right|$,$5\leqslant t\leqslant 30$,当$\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$或$\frac{3\pi}{2}$,即 $t=10$ 或 25 时,h 的最大值为 62.

5.7 三角函数的应用

1. C 【解析】由题意知 $A=2$,$f=\frac{1}{T}=\frac{1}{4\pi}$,初相为$-\frac{\pi}{3}$.

2. B 【解析】将 $t=\frac{1}{200}$ s 代入 $I=5\sin\left(100\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$,得 $I=2.5$ A.

3. C 【解析】根据图象得函数的最小值为 2,所以 $-3+k=2$,得 $k=5$,所以水深的最大值为 $3+5=8(\mathrm{m})$.

4. D 【解析】已知噪声的声波曲线 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$(其中 $A>0,\omega>0,0\leqslant\varphi<2\pi$)的振幅为 1,周期为 2π,初相为 $\frac{\pi}{2}$,可得 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{2\pi}=1$,所以噪声的声波曲线为 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$,所以通过听感主动降噪芯片生成相等的反向声波曲线的解析式为 $y=-\cos x$,故选 D.

5. D 【解析】根据 $s=3\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t+\frac{\pi}{3}\right)$,可知函数的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}}$,又 $T=1$,所以 $\sqrt{\frac{g}{l}}=\frac{2\pi}{T}=2\pi$,所以 $l=\frac{g}{4\pi^2}$,故选 D.

6. D 【解析】322 除以 33 余 25,322 除以 28 余 14,322 除以 23 余 0,第 322 天时,智力曲线 I 位于 $\frac{25}{33}$ 周期处,情绪曲线 E 位于 $\frac{1}{2}$ 周期处,体力曲线 P 刚好位于起始点处. A 选项,$\frac{25}{33}>\frac{3}{4}$,则智力曲线 I 不处于最低点,故 A 错误;B 选项,情绪曲线 E 处于下降期,故 B 错误;C 选项,第 322 天时,智力曲线 I 与情绪曲线 E 对应的函数值不等,故不相交,故 C 错误;D 选项,(322, 0)为体力曲线 P 和情绪曲线 E 的交点,且在 x 轴上,故 D 正确. 故选 D.

7. D 【解析】因为 $|y|=\left(2-\frac{1}{2}\left[\frac{2x}{\pi}\right]\right)|\sin\omega x|(x\geqslant 0)$ 的图象过点 $M\left(\frac{3\pi}{4},\frac{3}{2}\right)$,所以 $\frac{3}{2}=\left(2-\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\right]\right)\left|\sin\frac{3\pi\omega}{4}\right|=\frac{3}{2}\left|\sin\frac{3\pi\omega}{4}\right|$,所以 $\left|\sin\frac{3\pi\omega}{4}\right|=1$,则 $\sin\frac{3\pi\omega}{4}=\pm1$,所以 $\frac{3\pi\omega}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得 $\omega=\frac{4}{3}k+\frac{2}{3},k\in\mathbf{Z}$. 因为它每过相同的间隔振幅就变化一次,且过点 $M\left(\frac{3\pi}{4},\frac{3}{2}\right)$,所以由图象知 $\frac{3}{2}\times\frac{\pi}{|\omega|}=\frac{3\pi}{4}$,又因为 $1<\omega<3$,所以 $\omega=2$,所以 $|y|=\left(2-\frac{1}{2}\left[\frac{2x}{\pi}\right]\right)|\sin 2x|(x\geqslant 0)$. 因为点 N 的横坐标为 $\frac{4\pi}{3}$,所以当 $x=\frac{4\pi}{3}$ 时,$|y|=\left(2-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{\pi}\times\frac{4\pi}{3}\right]\right)\left|\sin\left(2\times\frac{4\pi}{3}\right)\right|=\left(2-\frac{1}{2}\times2\right)\left|\sin\frac{8\pi}{3}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$,即点 N 的纵坐标为 $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 D.

8. AC 【解析】令 $2\sin(\omega t+\varphi)=1$,得 $t=\frac{2k\pi+\frac{\pi}{6}-\varphi}{\omega},k\in\mathbf{Z}$ 或 $t=\frac{2k\pi+\frac{5\pi}{6}-\varphi}{\omega},k\in\mathbf{Z}$,所以 $\frac{2\pi}{3\omega}=\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{4\pi}{3\omega}=\frac{\pi}{3}$,解得 $\omega=2$ 或 $\omega=4$. 故选 AC.

9. AD 【解析】由题意,$R=\sqrt{3^2+(-3\sqrt{3})^2}=6$,$T=120=\frac{2\pi}{\omega}$,$\therefore\omega=\frac{\pi}{60}$,当 $t=0$ 时,$y=-3\sqrt{3}$,代入可得 $-3\sqrt{3}=6\sin\varphi$,$\because|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,$\therefore\varphi=-\frac{\pi}{3}$,故 A 正确;$f(t)=6\sin\left(\frac{\pi}{60}t-\frac{\pi}{3}\right)$,当 $t\in[0,60]$ 时,$\frac{\pi}{60}t-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$,$\therefore$函数 $y=f(t)$ 在 $[0,60]$ 上不单调递增,故 B 不正确;当 $t\in[0,60]$ 时,$\frac{\pi}{60}t-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$,$\therefore|y|_{\max}=6$,$\therefore$点 P 到 x 轴的距离的最大值为 6,故 C 不正确;当 $t=100$ 时,$y=-3\sqrt{3}$,则点 $P(-3,-3\sqrt{3})$,$\therefore|PA|=|3-(-3)|=6$,故 D 正确. 故选 AD.

10. $\frac{2}{3}$ $3\pi x-\pi$ 【解析】因为频率 $f=\frac{3}{2}$,所以 $T=\frac{1}{f}=\frac{2}{3}$,所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=3\pi$,所以相位为 $\omega x+\varphi=3\pi x-\pi$.

11. $\frac{H}{5}$ 【解析】设遮雨棚横截面正弦型曲线的振幅为 $A(A>0)$,则遮雨棚的最低点到地面的距离为 $H-A$,遮雨棚的最高点到地面的距离为 $H+A$,由题意有 $H-A\geqslant\frac{2}{3}(H+A)$,解得 $A\leqslant\frac{H}{5}$,所以遮雨棚横截面正弦型曲线振幅的最大值为 $\frac{H}{5}$.

12. ①② 【解析】当 $t=0$ 时,$s=2\sin\left(0+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$,故①正确;$s_{\min}=-2$,故②正确;函数的最小正周期 $T=2\pi$,故③错误. 综上可得,正确的说法是①②.

13. **解:**(1)由题图可知 $\begin{cases}-A+b=700,\\A+b=900,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}A=100,\\b=800.\end{cases}$

又由函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=12=\frac{2\pi}{\omega}$,可得 $\omega=\frac{\pi}{6}$.

将(7,900)代入 $y=100\sin\left(\frac{\pi}{6}t+\varphi\right)+800$,得 $\sin\left(\frac{7\pi}{6}+\varphi\right)=1$,则 $\frac{7\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得 $\varphi=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,又 $-\pi<\varphi<0$,所以 $\varphi=-\frac{2\pi}{3}$,故所求函数的解析式为 $y=100\sin\left(\frac{\pi}{6}t-\frac{2\pi}{3}\right)+800$.

(2)由题图可知,每隔半个最小正周期种群数量就出现一个低谷或一个高峰,又因为 $\frac{T}{2}=\frac{12}{2}=6$,所以从 7 月 1 日开始,每隔 6 天种群数量就出现一个低谷或一个高峰.

14. **解:**(1)根据题意可得 $\begin{cases}A+b=13,\\-A+b=7,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}A=3,\\b=10.\end{cases}$ $T=15-3=12$,$\therefore\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{6}$,$\therefore$函数的解析式为 $y=3\sin\frac{\pi}{6}t+10(0\leqslant t\leqslant24)$.

(2)由题意,水深 $y\geqslant4.5+7$,即 $3\sin\frac{\pi}{6}t+10\geqslant11.5$,$\therefore\sin\frac{\pi}{6}t\geqslant\frac{1}{2}$. 又 $0\leqslant t\leqslant24$,$\therefore\frac{\pi}{6}t\in\left[2k\pi+\frac{\pi}{6},2k\pi+\frac{5\pi}{6}\right]$,$k=0,1$,$\therefore t\in[1,5]$ 或 $t\in[13,17]$. 故该船在 1:00 至 5:00 或 13:00 至 17:00 能安全进港.

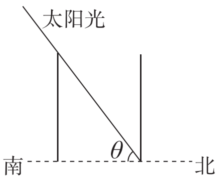
15. **解:**(1)由题意得,函数 $y=23.5°\sin\omega x$ 的最小正周期 $T=365$,又 $\omega>0$,所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{365}$.

(2)如图所示,当正午太阳光恰好照射到 B 楼底层时,$\tan\theta=1.34$,所以 $\theta\approx53.25°$,

要使得能被正午太阳光照射到，则太阳高度角 $\theta\leqslant 53.25°$.

由 $90°-(25°-y)\leqslant 53.25°$，解得 $y\leqslant -11.75°$，

整理得 $\sin\frac{2\pi}{365}x\leqslant -\frac{1}{2}$，可得 $\frac{7\pi}{6}\leqslant\frac{2\pi}{365}x\leqslant\frac{11\pi}{6}$，即 $212\frac{11}{12}\leqslant x\leqslant 334\frac{7}{12}$，又 $x\in\mathbf{Z}$，所以 $213\leqslant x\leqslant 334$，又 $334-213+1=122$，所以共有 122 天.



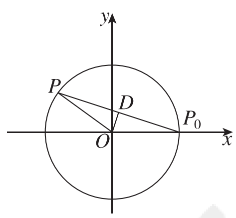
滚动习题（十一）

1. A 【解析】由题意知 $T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$. 由 $f(x)$的图象过点$(0,1)$知 $\sin\varphi=\frac{1}{2}$，因为$|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，故选 A.

2. A 【解析】$y=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left[\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{6}\right]$，所以将函数 $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度即可得到 $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象，故选 A.

3. B 【解析】观察表格信息可知，电压从 0 到 22、从 22 到 0、从 0 到-22、从-22 到 0，这四个过程是一个周期，所以周期为 0.4 s，故选 B.

4. C 【解析】由题意知，每 5 s 转一圈，故 $\frac{2\pi}{\omega}=5$，得 $\omega=\frac{2\pi}{5}$，故 2 s 后，$\angle POP_0=\frac{4\pi}{5}$. 如图，作 $OD\perp P_0P$，垂足为 D，则$|P_0P|=2|PD|=2\times 2\times\sin\frac{2\pi}{5}=4\sin\frac{2\pi}{5}$，故选 C.



5. A 【解析】因为 $g(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，且 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]$，所以将 $g(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度得到函数 $f(x)$的图象. 故选 A.

6. A 【解析】由题意得 $f(x)=\cos^2\omega x-\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+\frac{1}{2}=\frac{1+\cos 2\omega x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x+\frac{1}{2}=\cos\left(2\omega x+\frac{\pi}{3}\right)+1(\omega>0)$，当 $x=0$ 时，$2\omega x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}<\pi$，若函数 $f(x)=\cos^2\omega x-\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+\frac{1}{2}(\omega>0)$在区间$[0,\pi]$上有且仅有 2 个零点，则 $3\pi\leqslant 2\omega\pi+\frac{\pi}{3}<5\pi$，解得$\frac{4}{3}\leqslant\omega<\frac{7}{3}$. 故选 A.

7. AD 【解析】$f(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. 将 $f_1(x)=\sqrt{2}\sin x+\sqrt{2}$的图象向下平移$\sqrt{2}$个单位长度，再向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度，所得图象与 $f(x)$的图象重合，故 A 正确；$f_2(x)=\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，则 $f_2(x)$的图象无法经过平移与 $f(x)$的图象重合，故 B 错误；$f_3(x)=\sin x$，则 $f_3(x)$的图象无法经过平移与 $f(x)$的图象重合，故 C 错误；$f_4(x)=2\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)=2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}=\sin x+\cos x+1=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1$，则将 $f_4(x)$的图象向下平移 1 个单位长度，所得图象与 $f(x)$的图象重合，故 D 正确. 故选 AD.

8. BCD 【解析】因为函数 $f(x)=\sin(3x-\varphi)$的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$对称，所以 $3\times\frac{\pi}{4}-\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=\frac{\pi}{4}-k\pi,k\in\mathbf{Z}$，又$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$，所以 $f(x)=\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$. 对于 A，将函数 $f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度，可得到函数 $y=\sin\left[3\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=-\sin 3x$ 的图象，故 A 错误；对于 B，$f\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left[3\left(x-\frac{\pi}{12}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=-\cos 3x$，易知函数的定义域为 $\mathbf{R}$，又$-\cos 3(-x)=-\cos 3x$，所以 $y=f\left(x-\frac{\pi}{12}\right)$是偶函数，故 B 正确；对于 C，由 $x\in\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right]$，得 $3x-\frac{\pi}{4}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，因为 $y=\sin x$ 在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增，所以函数 $f(x)$在$\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right]$上单调递增，故 C 正确；对于 D，因为 $f(x)_{\max}=1,f(x)_{\min}=-1$，且$|f(x_1)-f(x_2)|=2$，$f(x)$的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{3}$，所以$|x_1-x_2|$的最小值为$\frac{\pi}{3}$，故 D 正确. 故选 BCD.

9. $f(x)=\frac{3}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1$ 【解析】由题图可知函数 $f(x)$的最大值为$\frac{5}{2}$，最小值为$-\frac{1}{2}$，则$\begin{cases}A+k=\frac{5}{2},\\-A+k=-\frac{1}{2},\end{cases}$解得$\begin{cases}A=\frac{3}{2},\\k=1.\end{cases}$函数 $f(x)$的最小正周期 $T=2\times\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right)=\pi$，又 $\omega>0$，所以$\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，解得 $\omega=2$，故 $f(x)=\frac{3}{2}\sin(2x+\varphi)+1$. 当 $x=\frac{\pi}{12}$时，$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{3}{2}\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}+\varphi\right)+1=\frac{5}{2}$，即 $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=1$，所以$\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，所以 $f(x)=\frac{3}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1$.

10. $\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{9}(k\in\mathbf{Z})$ 【解析】由于 $f(0)=\sin\varphi=\frac{1}{2}$，且 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，故 $\varphi=\frac{\pi}{6}$. 因为 $A(x_1,f(x_1))$，$B(x_2,f(x_2))$是 $f(x)$图象上的任意两点，且$|f(x_1)-f(x_2)|=2$ 时，$|x_1-x_2|$的最小值为$\frac{\pi}{3}$，所以$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{3}$，得 $T=\frac{2\pi}{3}$，所以 $\omega=3$，故 $f(x)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$. 令 $3x+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得 $x=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{9}(k\in\mathbf{Z})$，故 $f(x)$图象的对称轴方程为 $x=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{9}(k\in\mathbf{Z})$.

11. $[14,20)$ **[解析]** 由 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{12}$,得 $\frac{\pi}{3}\leqslant\omega x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{12}\omega+\frac{\pi}{3}$. 根据已知结合正弦函数的图象与性质可得,应满足 $\frac{3\pi}{2}\leqslant\frac{\omega\pi}{12}+\frac{\pi}{3}<2\pi$,解得 $14\leqslant\omega<20$,故 ω 的取值范围是 $[14,20)$.

12. $0.3\sin\left(60x+\frac{\pi}{6}\right)+0.3$ **[解析]** 由题意,汽车的速度 $v=64.8\ \text{km/h}=18\ \text{m/s}$,轮胎的半径 $r=0.3\ \text{m}$,所以周长 $l=2\pi r=0.6\pi(\text{m})$,所以 $T=\frac{l}{v}=0.6\pi\cdot\frac{1}{18}=\frac{\pi}{30}$,又 $T=\frac{2\pi}{\omega}$,所以 $\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{30}$,得 $\omega=60$. 因为 P 到该轮轴中心的距离为 $0.3\ \text{m}$,所以 $A=0.3$,$b=0.3$,即 $f(x)=0.3\sin(60x+\varphi)+0.3$. 因为刚开始启动时,$P$ 离地面的距离为 $0.45\ \text{m}$,所以 $f(0)=0.45$,即 $0.3\sin\varphi+0.3=0.45$,得 $\sin\varphi=0.5$,又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$,所以 $f(x)=0.3\sin\left(60x+\frac{\pi}{6}\right)+0.3$.

13. **解:**(1) $f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x-2\sqrt{3}=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-2\sqrt{3}$,则 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)由 $2x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,得 $x=k\pi+\frac{\pi}{12}$,$k\in\mathbf{Z}$,则当 $x=k\pi+\frac{\pi}{12}$,$k\in\mathbf{Z}$ 时,$f(x)$ 取得最大值 $2-2\sqrt{3}$,故 $f(x)$ 的最大值为 $2-2\sqrt{3}$,取得最大值时 x 的集合为 $\left\{x\middle| x=k\pi+\frac{\pi}{12},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(3)由 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$,可得 $2x+\frac{\pi}{3}\in\left[0,\frac{4\pi}{3}\right]$,

由 $0\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}$,得 $-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{12}$,则 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{12}\right]$ 上单调递增,由 $\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{4\pi}{3}$,得 $\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$,

则 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减,故 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{12}\right]$,单调递减区间为 $\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$.

14. **解:**(1)由 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,得 $2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$,

故 $f(x)_{\max}=2+1+m=3$,得 $m=0$,

所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$. 由 $f(x)\geqslant 0$,得 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\geqslant-\frac{1}{2}$,所以 $2k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{7\pi}{6}$,$k\in\mathbf{Z}$,解得 $k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,故使 $f(x)\geqslant 0$ 成立的 x 的取值集合为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$,$k\in\mathbf{Z}$.

(2)由题意可知 $g(x)=2\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{6}\right]+1-1=2\sin\left(2x-\frac{5\pi}{6}\right)$,由 $x\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$,得 $2x-\frac{5\pi}{6}\in\left(-\frac{7\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$,因为 $y=2\sin x$ 在 $\left(-\frac{7\pi}{6},-\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减,在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增,

所以若 $x_1,x_2\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$,且 $g(x_1)=g(x_2)$,则 $2x_1-\frac{5\pi}{6}+2x_2-\frac{5\pi}{6}=-\pi$,可得 $x_1+x_2=\frac{\pi}{3}$,

所以 $g(x_1+x_2)=g\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(2\times\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)=-1$.

15. **解:**(1) $f(x)=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)+2\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\omega x\cos\frac{\pi}{3}-\cos\omega x\sin\frac{\pi}{3}+2\left(\cos\omega x\cos\frac{\pi}{6}+\sin\omega x\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}\sin\omega x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega x=\sqrt{3}\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$,因为将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象,所以 $g(x)=\sqrt{3}\sin\left[\omega\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=\sqrt{3}\sin\left(\omega x+\frac{\omega\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)$,

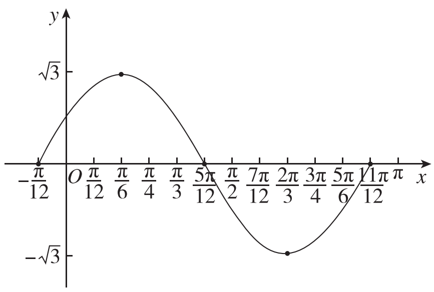
又 $g(x)$ 的图象关于 y 轴对称,所以 $g(x)$ 为偶函数,故 $\frac{\omega\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,解得 $\omega=2+6k$,$k\in\mathbf{Z}$.

因为 $0<\omega<3$,所以 $\omega=2$.

(2)由(1)可得函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,列表:

x	$-\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{12}$
$2x+\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)$	0	$\sqrt{3}$	0	$-\sqrt{3}$	0

描点、连线,可得函数 $f(x)$ 在一个周期内的图象如图所示.



(3)原方程即为 $\sqrt{3}m\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}(m+1)=0$,即为 $m\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1-2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+m+1=0$,令 $t=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$,$x\in\left[-\frac{7\pi}{6},0\right]$,则 $t\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$,得关于 t 的方程 $-2t^2+mt+m+2=0$,即 $(t+1)(2t-m-2)=0$,解得 $t_1=-1$,$t_2=\frac{m+2}{2}$.

当 $t_1=-1$ 时,由 $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-1$,$x\in\left[-\frac{7\pi}{6},0\right]$,可得 $x=-\frac{2\pi}{3}$,要使原方程在 $\left[-\frac{7\pi}{6},0\right]$ 上有两个不相等的实数根,

则 $0<\frac{m+2}{2}\leqslant\frac{1}{2}$,解得 $-2<m\leqslant-1$,

故实数 m 的取值范围为 $(-2,-1]$.